Théorème de Moivre Laplace

1. Variables centrées et réduites

Définition 1.

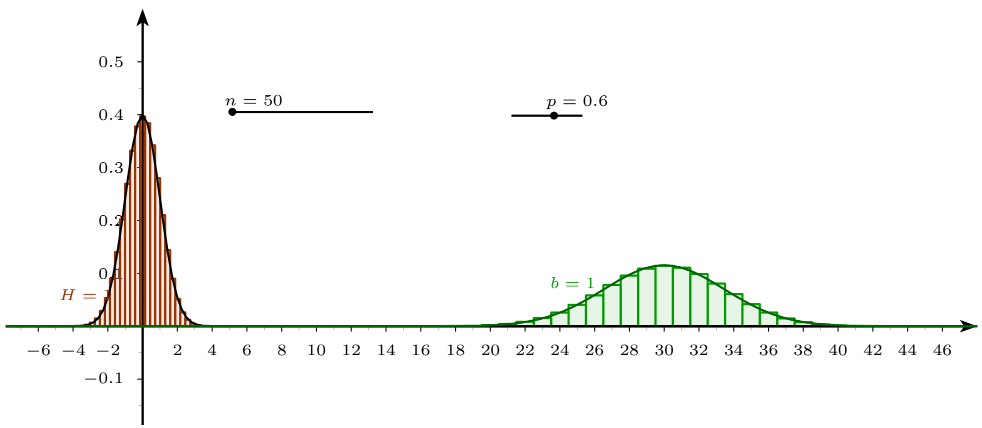
Soit une variable aléatoire discrète X d'espérance $E(X) = m$, de variance $V(X) = V$ et d'écart type $\sigma(X) = \sigma$. Alors :
- La variable aléatoire $X - m$ a une espérance nulle : elle est dite **centrée** ;
- la variable aléatoire $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ a une espérance nulle et un écart type égal à 1 : elle est dite **centrée** et **réduite**.

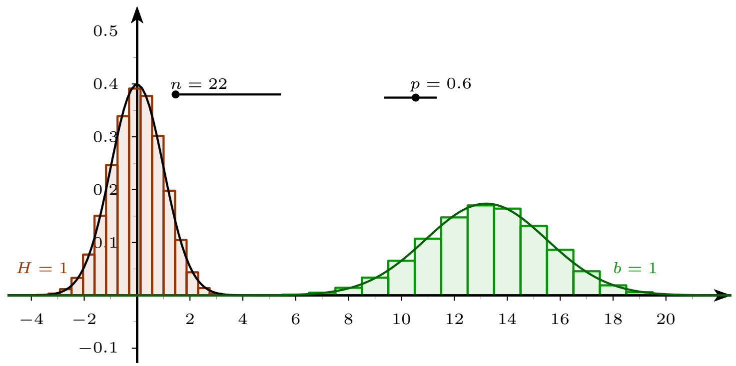
Propriété 1.

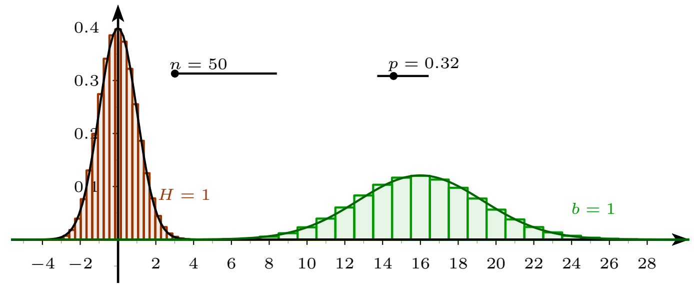
Soient un entier naturel n et un réel p de $[0; 1]$. Soit une variable aléatoire X_n suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$. Alors la variable aléatoire Z_n définie par $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ a pour espérance 0 et pour écart type 1. La variable aléatoire Z_n est donc la variable centrée réduite associée à la variable X_n.

2. Théorème de Moivre Laplace

Soit une variable aléatoire X_n qui suit la loi binomiale $B(n; p)$. Alors X_n associe le nombre de succès lors de n répétitions d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p. On a : $E(X_n) = np$ et $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$. Si on fixe la valeur de p et que l'on fait augmenter n, l'histogramme représentant les valeurs prises par X_n semble se rapprocher d'une « courbe en cloche » (en vert). Si p varie, la « courbe en cloche » change de caractéristiques(hauteur, étalement). En revanche, si on considère $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$, quelle que soit la valeur de p choisie, « la courbe en cloche » associée à Z_n ne semble pas changer.







Théorème 2.

Théorème de De Moivre-Laplace (admis). n est un entier naturel non nul et p appartenant à $]0\,;\,1[$.
On considère une suite de variables aléatoires (X_n) suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$.
Soit la suite de v. a. (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Alors pour tous les réels a et b tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx,$$

Remarque 1. *La limite est presque atteinte lorsque l'on a* $n \geqslant 30$ *et* $\frac{5}{n} \leqslant p \leqslant 1 - \dfrac{5}{n}$.