Géométrie dans l'espace

1. Vecteurs

1.1. Extension de la notion de vecteur à l'espace

On étend à l'espace la notion de vecteur définie dans le plan, ainsi que les opérations et propriétés associées vues en seconde et en première, d'égalité de deux vecteurs, de multiplication par un réel, de somme de deux vecteurs, de relation de Chasles, de vecteur directeur d'une droite. On rappelle :

- Dans l'espace, pour tout point A et tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
- A, B, C et D étant quatre points de l'espace, on a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
- La notion de colinéarité reste valable dans l'espace c'est-à-dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$, et tout vecteur est colinéaire au vecteur nul.

Propriété 1.

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel k vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
Rappel : on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1.2. Vecteurs coplanaires

Propriété 2.

Caractérisation d'un plan
Soient dans l'espace, un point A et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que l'on a $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ où x et y sont des réels, est le plan (ABC), tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.

Propriété 3.

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace. S'il existe trois réels non tous nuls α, β et γ tels que $\alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} + \gamma\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$ alors les quatre points A, B, C et D sont coplanaires.

Définition 1.

Dire que trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** signifie que les points A, B, C et D de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ appartiennent au même plan.

Propriété 4.

Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe trois réels non tous nuls α, β et γ tels que :

$$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

Propriété 5.

Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires

si et seulement si

deux d'entre eux sont colinéaires ou s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$.

Définition 2.

On dit alors que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dirigent le plan (ABC) ou qu'ils forment un couple de **vecteurs directeurs** du plan (ABC).

Propriété 6.

Utilisation : Droite parallèle à un plan
Soient A, B, C trois points non alignés et E et F deux points distincts. La droite (EF) est parallèle au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{EF}= x\ \overrightarrow{AB} +y\ \overrightarrow{AC}$.

Propriété 7.

Si deux plans sont dirigés par un même couple de vecteurs, alors ils sont parallèles.

2. Géométrie analytique dans l'espace

2.1. Repérage dans l'espace

Définition 3.

Un repère de l'espace est la donnée d'un point origine O et de trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ non coplanaires. On note alors $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ ce repère. *Les repères peuvent être quelconques, orthogonaux, orthonormaux.*

Propriété 8.

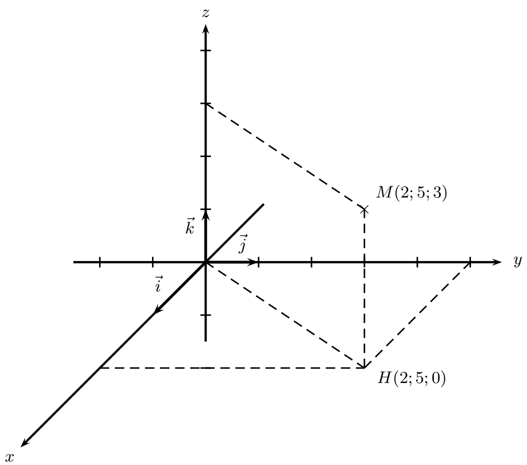
Soit un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ de l'espace.
Pour tout point M, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de réels tels que $\overrightarrow{v} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.

Définition 4.

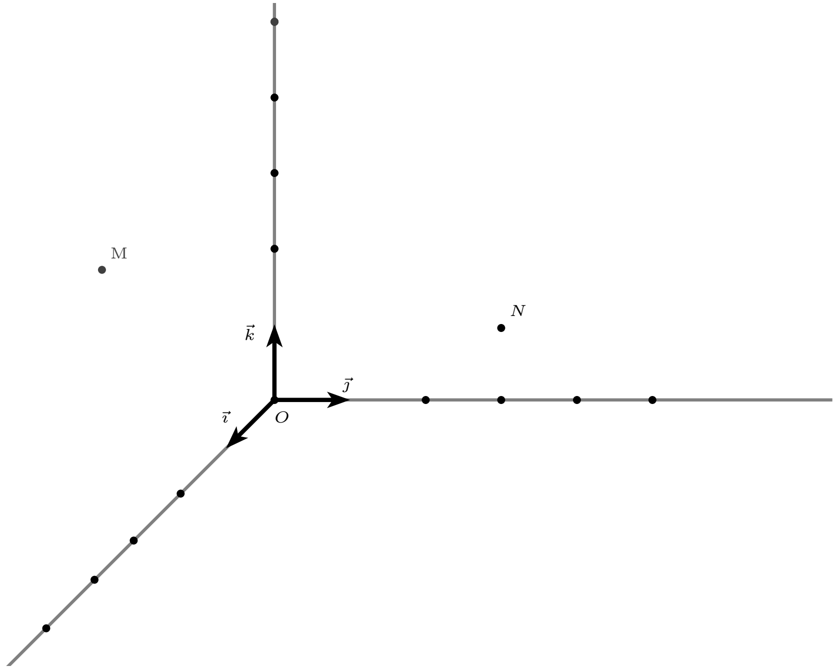
Ce triplet $(x; y; z)$ est alors appelé coordonnées, x **l'abscisse**, y **l'ordonnée** et z la **cote** du point M (resp. du vecteur $\overrightarrow{v}$) dans ce repère.

On note alors $M(x; y; z)$ d'une part, $\overrightarrow{v}(x; y; z)$ ou $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ d'autre part.

Application :



Exemple 1. Placer $P(1; 2; 3)$. Déterminer les coordonnées de M sachant que $z_M = 3$ et celles de N sachant que $x_N = 0$. Déterminer les coordonnées de Q tel que $PQNM$ soit un parallélogramme.



Théorème 9.

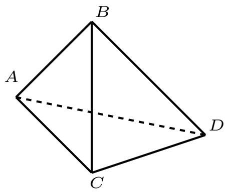
Dans l'espace, soient un repère $(O; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$ et trois points $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$ et $C(x_C; y_C; z_C)$, alors

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$;
- le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$;
- le centre de gravité du triangle ABC a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$;

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et un réel λ, alors

- le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$;
- le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

Exemple 2. Montrer que les segments qui joignent les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourants en leur milieu.



2.2. Droites de l'espace

2.2.1 Exercice

Exemple 3. Soient $A(2;3;1)$, $B(5;-2;3)$ et $C(-4;13;z)$ trois points du plan ou de l'espace. Trouver la valeur de z telle que A, B et C soient alignés

2.2.2 Représentation paramétrique

Définition 5.

Système d'équations paramétriques d'une droite

Si l'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, et $M(x;y;z)$, alors M appartient à une droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & x_A & + & t\,x_{\vec{u}} \\ y & = & y_A & + & t\,y_{\vec{u}} \\ z & = & z_A & + & t\,z_{\vec{u}} \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ est un paramètre réel.}$$

Ceci constitue un système d'équations paramétriques de la droite $d(A,\vec{u})$

Application

Soient le point $A(1;-4;3)$ et le vecteur $\vec{u}(5;1;-2)$.

Alors la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = 1+5t \\ y & = -4+t \\ z & = 3-2t \end{array}\right.$$

c'est-à-dire qu'un point $M(x;y;z)$ appartient à cette droite si et seulement si ses coordonnées $(x;y;z)$ vérifient ce système d'équations.

Remarque 1. Le **segment** $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$ avec $t \in [0;1]$.

Exemple 4. ① Dans le cube $ABCDEFHH$, on considère le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$. Déterminer un système d'équations paramétrique de (BH), puis de la parallèle d à (BH) passant par G.

② Trouver deux points et un vecteur directeur de d : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & -3 \\ y & = & 4+2t \\ z & = & -t \end{array}\right.$.

③ Dire si $A(-3;6;-1)$ et $B(-3;-4;3)$ appartiennent à la droite d précédemment définie.

④ Position relative de d et (MN) où $M(3;0;3)$ et $N(0;3;1)$?

2.3. Plans de l'espace

2.3.1 Exercice

Exemple 5. ① Les points $A(0;-1;0)$, $B(-2;-3;2)$, $C(4;-1;-7)$ et $D(0;-5;-3)$ appartiennent-ils à un même plan ?

Même question avec $D(0;-5;-4)$.

2.3.2 Système d'équations paramétriques d'un plan.

Définition 6.

Système d'équations paramétriques d'un plan

Si l'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, et $M(x;y;z)$, alors M appartient au plan passant par A de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lllllll} x & = & x_A & + & t_1\,x_{\vec{u}} & + & t_2\,x_{\vec{v}} \\ y & = & y_A & + & t_1\,y_{\vec{u}} & + & t_2\,y_{\vec{v}} \\ z & = & z_A & + & t_1\,z_{\vec{u}} & + & t_2\,z_{\vec{v}} \end{array}\right. \quad \text{où } t_1 \text{ et } t_2 \text{ sont des paramètres réels.}$$

Ceci constitue une système d'équations paramétriques du plan $\mathcal{P}(A,\vec{u},\vec{v})$