# Loi normale centrée

## 1. Rappel

**Théorème 1.**

**Théorème de De Moivre-Laplace** (admis). n est un entier naturel non nul et p appartenant à $]0\,;\,1[$.
On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)$ suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Soit la suite de v. a. $(Z_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Alors pour tous les réels $a$ et $b$ tels que $a < b$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

c'est-à-dire que lorsque $n$ devient « grand » $Z_n$ suit approximativement une loi de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

**Remarque 1.** *La limite est presque atteinte lorsque l'on a* $n \geqslant 30$ *et* $\frac{5}{n} \leqslant p \leqslant 1 - \frac{5}{n}$.

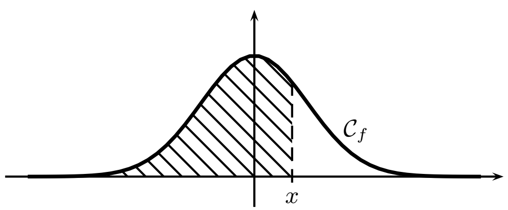
## 2. Loi normale centrée et réduite

### 2.1. Définition et propriétés

**Définition 1.**

Une variable aléatoire $X$ suit la loi **normale centrée réduite** notée $\mathcal{N}(0;1)$ si sa densité $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ c'est-à-dire si pour tout réel $x$ on a :

$$P(X \leqslant x) = \lim_{a \to -\infty} \int_a^x f(t)dt$$




La représentation graphique de la fonction densité de la loi $\mathcal{N}(0;1)$ est appelée courbe en cloche.

*Contextes d'utilisation :* Taille d'un individu, fréquence cardiaque, quotient intellectuel, ...

**Propriété 2.**

On parle de loi normale centrée, réduite car si $X \sim \mathcal{N}(0;1)$ alors $E(X) = 0$ et $\sigma(X) = 1$.

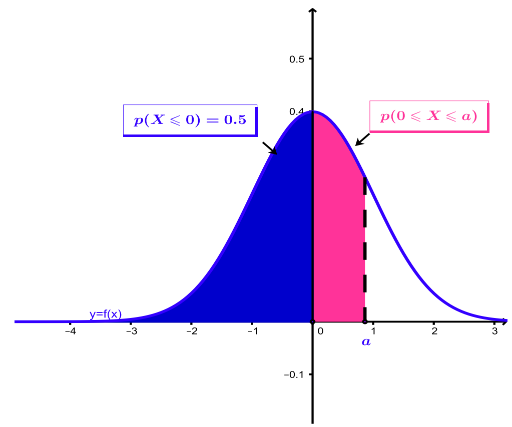
**Propriété 3.**

- $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ ;
- l'aire totale sous la courbe de $f$ est égale à 1 ;
- $f$ est paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ;
- $P(X \geqslant 0) = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire que l'aire sous la courbe de $[0;+\infty[$ est $\frac{1}{2}$ ;
- Pour tout réel $x$, $P(X \leqslant -x) = P(X \geqslant x) = 1 - P(X \leqslant x)$.
- Pour tout réel positif $x$, $P(-x \leqslant X \leqslant x) = 2P(X \leqslant x) - 1$

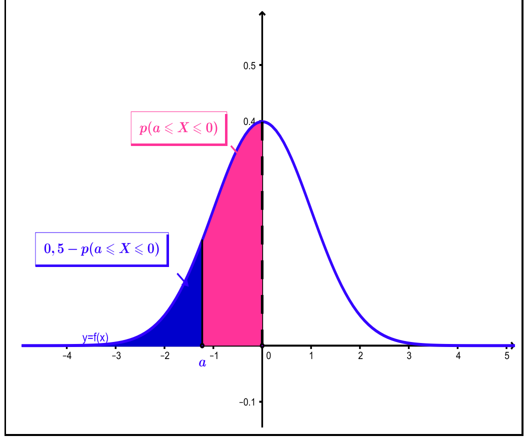
Les calculatrices ne permettent que le calcul de $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

**Calcul de $\mathbf{P(X \leqslant a)}$ :**

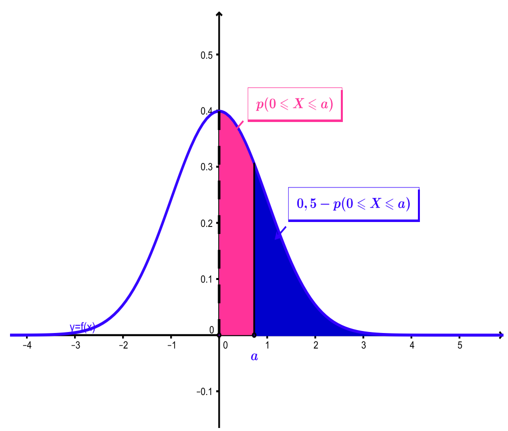
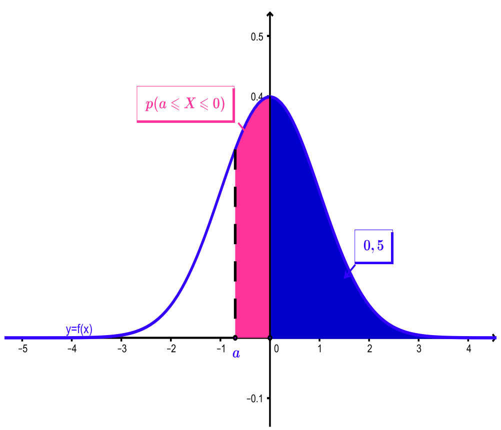
**Si a ⩾ 0** : on utilise
$\mathbf{P(X \leqslant a) = 0,5 + P(0 \leqslant X \leqslant a)}$




**Si a ⩽ 0** : on utilise
$\mathbf{P(X \leqslant a) = 0,5 - P(a \leqslant X \leqslant 0)}$



**Calcul de $\mathbf{P(X \geqslant a)}$ :**

| **Si $\mathbf{a \geqslant 0}$** : on utilise<br>$\mathbf{P(X \geqslant a) = 0,5 - P(0 \leqslant X \leqslant a)}$ | **Si $\mathbf{a \leqslant 0}$** : on utilise<br>$\mathbf{P(X \geqslant a) = 0,5 + P(a \leqslant X \leqslant 0)}$ |
|---|---|
|  |  |





On peut aussi considérer que « 1E99 » est une bonne approximation de $+\infty$ !...

Calculer $P(X \geqslant 1,5)$ :

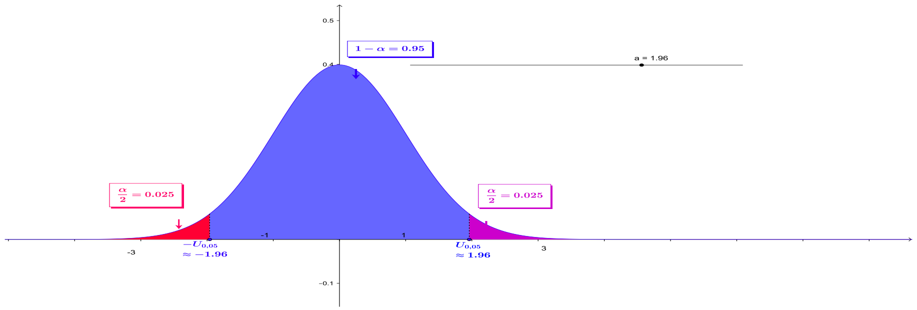
Calculer $P(X < -1,5)$ :

## 2.2. Intervalles associés à une probabilité donnée

**Propriété 4.**

Si $X$ est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0;1)$, alors pour tout $\alpha \in ]0;1[$, il existe un unique réel positif $u_\alpha$ tel que $P(-u_\alpha \leqslant X \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$.

*La preuve est explicitement au programme.*




**Remarque 2.** *En particulier on a*

- $u_{0,05} \approx 1,96$ *c'est-à-dire* $P(-1,96 \leqslant X \leqslant 1,96) \approx 0,95$*, ce qui signifie qu'environ* 95% *des réalisations se trouvent dans l'intervalle* $[-1,96;1,96]$ *;*
- $u_{0,01} \approx 2,58$ *c'est-à-dire* $P(-2,58 \leqslant X \leqslant 2,58) \approx 0,99$*, ce qui signifie qu'environ* 99% *se trouvent dans l'intervalle* $[-2,58;2,58]$.

**Remarque 3.** *Pour effectuer les calculs à la calculatrice, si on recherche a réel tel que* $P(-a \leqslant X \leqslant a) = 0,99$*, il faut considérer* $p(X < a) = 0,995$*. Expliquez.*