Calcul intégral : partie 3

Le plan est muni d'un repère orthogonal $\left(O;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. Notion d'intégrale

1.1. Rappel

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et F une primitive de f sur $[a;b]$. Alors :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

<u>Démonstration</u>

La fonction $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f sur $[a;b]$.
Donc il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$. Or, $G(a) = 0$ donc $k = -F(a)$ puis :
$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) + k = F(b) - F(a)$

1.2. Définition

Définition 1.

Soit f une fonction continue et de signe quelconque sur un intervalle I et a et b deux réels quelconques de I.
L'intégrale de a **à** b **de** f est le nombre $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur $[a;b]$.
On écrit :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

1.3. Propriétés immédiates

Propriété 1.

Soit $f$une fonction continue sur un intervalle I, a, b deux réels de I.

- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

2. Propriétés des intégrales

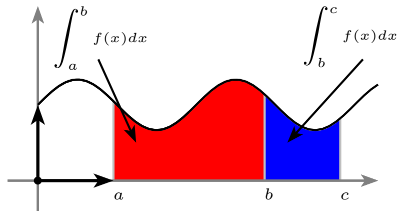
2.1. Relation de Chasles.

Propriété 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et $a, b, c \in I$:

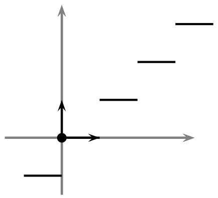
$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad \text{On retrouve : } \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Preuve. Lorsque $a \leqslant b \leqslant c$ il s'agit de l'additivité des aires :



La relation de Chasles permet également d'étendre la notion d'intégrale aux fonctions « continues par morceaux » :

Exemple 1. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \mathrm{E}(x)dx =$ ....



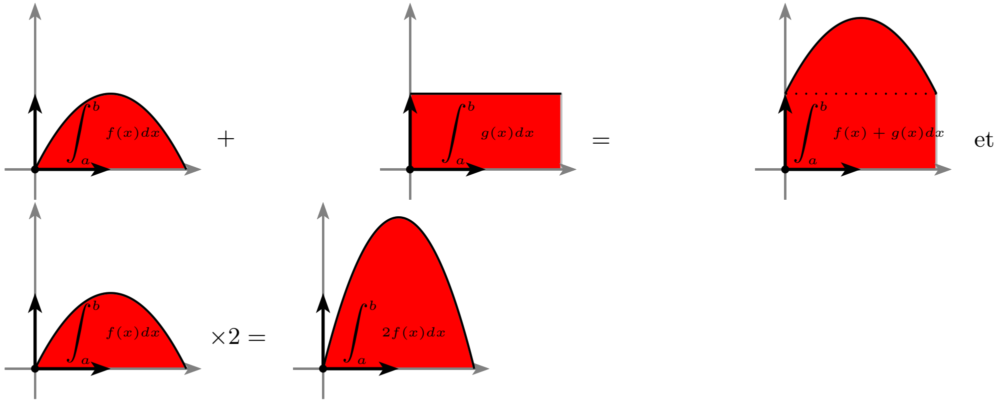
2.2. Linéarité

Propriété 3.

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a, b et c trois réels de I et α et β deux réels quelconques.

- $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$

Illustration graphique :



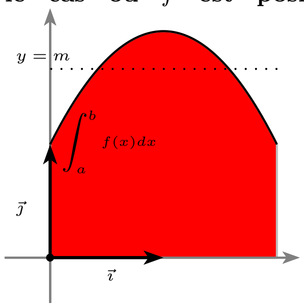
2.3. Valeur moyenne

Définition 2.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ $(a<b)$
La **valeur moyenne** de f sur $[a;b]$ est le nombre m défini par :

$$\boxed{m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$$

Illustration graphique dans le cas où f est positive :



Propriété 4.

Soient f et g continues sur un intervalle I et $a,b\in I$ avec **a<b**. Alors :

1. si $f(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in I$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\geqslant 0$.
2. si $f(x)\leqslant g(x)$ pour tout $x\in[a;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$.
3. si $m\leqslant f(x)\leqslant M$ pour tout $x\in[a;b]$, alors $\displaystyle m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant M(b-a)$.

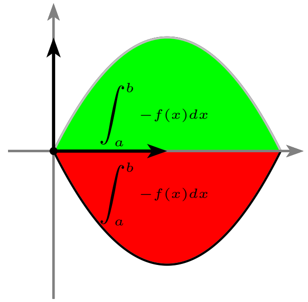
Preuve. Le premier point est une propriété des aires, le second découle de la linéarité de l'intégrale et le dernier est une application du second au cas où l'un des membres est constant.

3. Calcul d'aires

3.1. Fonction négative

Propriété 5.

si $f(x)\leqslant 0$ sur $[a;b]$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$: l'intégrale correspond alors à l'opposé de l'aire au dessus de la courbe.



3.2. Fonction de signe quelconque

Propriété 6.

$\int_a^b f(x)dx$ correspond à l'aire délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ et la courbe C_f, comptée **positivement** lorsque C_f est au-dessus de l'axe des abscisses et **négativement** lorsque C_f est en dessous.

3.3. Aire entre deux courbes

Théorème 7.

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ (donc $a\leqslant b$) telles que sur cet intervalle on ait : $g\leqslant f$. L'aire du plan limitée par les courbes de f et de g ainsi que les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est donnée en unités d'aires par :

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\mathrm{d}x.$$

3.4. Calcul de volumes : hors programme

Théorème 8.

L'espace est muni d'un repère orthomormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k})$. Soit a et b deux réels tels que $a\leqslant b$. On considère un solide de l'espace compris entre deux plans, $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$, parallèles au plan (xOy) d'équations respectives $z=a$ et $z=b$. Soit $\mathcal{S}(h)$ l'aire de la section du solide par le plan, $\mathcal{P}_h$, parallèle à (xOy) d'équation $z=h$ tel que $a\leqslant z\leqslant b$ alors le volume du solide (en unités de volume) est donné par : $\displaystyle\mathcal{V}=\int_a^b\mathcal{S}(h)\mathrm{d}h$.