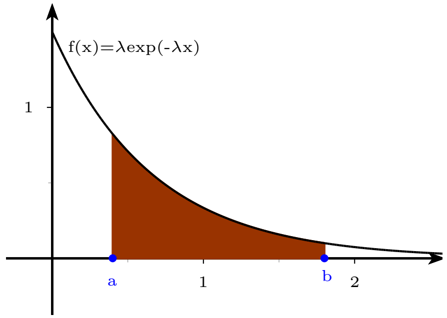
Loi exponentielle

Définition 1.

Une variable aléatoire continue T suit une **loi exponentielle de paramètre le réel** $\lambda > 0$ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$



Propriété 1.

Dans ce cas,on a pour $t > 0$:

$p(T \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$

$p(T > t) = e^{-\lambda t}$

Définition 2.

La durée de vie d'un appareil est dite « sans vieillissement »lorsque la probabilité qu'il fonctionne encore pendant une durée h (au moins) ne dépend que de h et pas de la durée de vie passée. $p_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t + h) = p(T \geqslant h)$

Remarque (ROC) ★

Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ alors, pour tout $t \geqslant 0$ et $h \geqslant 0$, on a :

$$p_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t + h) = \frac{p\left((T \geqslant t + h) \cap (T \geqslant t)\right)}{p(T \geqslant t)} = \frac{p(T \geqslant t + h)}{p(T \geqslant t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h}.$$

Donc : $p_{(T \geqslant t)}(T \geqslant t + h) = p(T \geqslant h)$.

Remarque : Cette propriété porte le nom de "durée de vie sans vieillissement" car elle montre que la durée de vie sur une période h ne dépend pas de l'âge t à partir duquel on considère cet événement.

Espérance mathématique : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de densité f. On définit **l'espérance mathématique** de X par :

$$E(X) = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t x f(x) dx$$

Propriété 2.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
Alors : $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$