Définition 1.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace et trois points A, B et C de l'espace tels que
$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C.
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarque

Le produit scalaire ne dépend pas des représentants, il ne dépend que des vecteurs : il peut se calculer avec les normes des vecteurs.

Définition 2.

Le *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le **nombre réel** :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2\right)$.
D'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ se lit « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ ».

Remarque

Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.

Définition 3.

On appelle carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ le nombre $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$, noté $\overrightarrow{u}^2$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$.

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = \vec{0}$$

Remarque

Si A et B sont deux points quelconques,
$\overrightarrow{AB}^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 = AB^2$.