Produit scalaire dans l'espace

1. Les différentes expressions du produit scalaire

1.1. Définitions

Définition 1.

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace et trois points A, B et C de l'espace tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B et C.
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, est le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarque 1. *Le produit scalaire ne dépend pas des représentants, il ne dépend que des vecteurs : il peut se calculer avec les normes des vecteurs.*

Définition 2.

Le *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le **nombre réel** :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}||^2\right)$.
D'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ se lit « $\overrightarrow{u}$ scalaire $\overrightarrow{v}$ ».

Remarque 2. *Si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est nul.*

Définition 3.

On appelle carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{u}$ le nombre $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u}$, noté $\overrightarrow{u}^2$: $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}||^2$.

$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \iff \overrightarrow{u} = \vec{0}$

Remarque 3. *Si A et B sont deux points quelconques, $\overrightarrow{AB}^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 = AB^2$.*

1.2. Autres expressions du produit scalaire de deux vecteurs non nuls

Avec le cosinus

Définition 4.

si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls, soit A un point de l'espace et B, C les points définis par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, on a :
$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}|| \times \cos(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Indépendance des représentants car conservation des angles par translation

Vecteurs orthogonaux : Dans l'espace, dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **orthogonaux** signifie que si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.*Par convention :* **le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur**.
Lorsque deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux on note $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$.

Propriété 1.

Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$est nul.
Soit : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ équivaut à $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ ou $(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \frac{\pi}{2}$.

Vecteurs colinéaires : expression simplifiée du produit scalaire
Convention : **Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur**.

Propriété 2.

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires.
- Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et de même sens, alors on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.
- Si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non nuls et sens contraire, alors on a : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.

Avec le projeté orthogonal

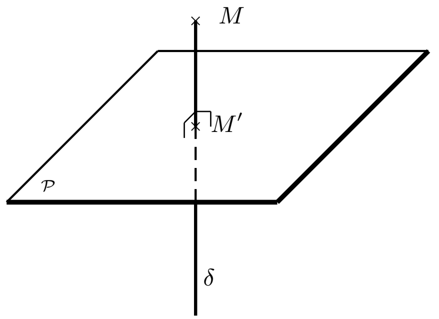
.

Définition 5.

Projeté d'un point sur un plan. Soient dans l'espace
- un plan $\mathcal{P}$,
- un point M,
- la droite δ passant par le point M et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$,
- le point M' intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite δ.

Le point M' est appelé **le projeté orthogonal** du point M sur le plan $\mathcal{P}$.

Remarque : de tous les points du plan $\mathcal{P}$, le point M' est alors le plus proche de M (penser au théorème de Pythagore).



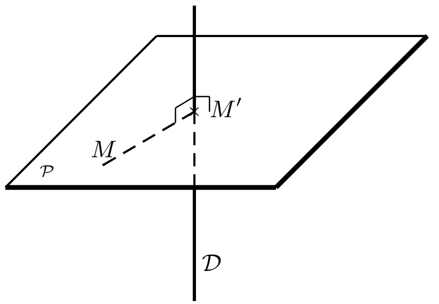
Définition 6.

Projeté d'un point sur une droite. Soient dans l'espace

- une droite $\mathcal{D}$,
- un point M,
- le plan $\mathcal{P}$ passant par le point M et perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$,
- le point M' intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

Le point M' est appelé **le projeté orthogonal** du point M sur la droite $\mathcal{D}$.

Remarque : de tous les points de la droite $\mathcal{D}$, le point M' est alors le plus proche de M



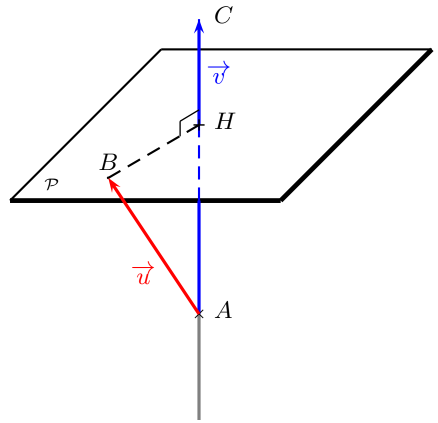
Exemple 1. *$ABCDEFGH$ est un cube. Déterminer le projeté orthogonal du point A sur la droite (HC).*

Propriété 3.

Soit $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs ($\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$), soit A un point de l'espace et B, C les points définis par $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$, en notant H le projeté orthogonal de B sur (AC). Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Pour $\overrightarrow{u}$ vecteur directeur unitaire (norme 1) de (AC) : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{u} = \pm AH$.



Remarque 4. *Intérêt :*

- *Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AC$*
- *Si $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont de sens contraire, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AH \times AC$*

2. Expression analytique du produit scalaire

L'espace est muni d'un repère orthonormal.

Théorème 4.

Dans une base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$,
si $\overrightarrow{u}(x; y; z)$ et $\overrightarrow{v}(x'; y'; z')$ alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$.