Ecriture exponentielle

Notation

Le nombre $\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ est noté $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ donc tout nombre complexe peut s'écrire sous la **forme exponentielle**.

$$\boxed{z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$$

L'égalité suivante est appelée la **formule d'Euler** :

$$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$$

De l'écriture exponentielle à l'écriture algébrique

Exemple :

$4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} =$

De l'écriture exponentielle à l'écriture algébrique

Exemple :

$4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Valeurs à connaître

- $\mathrm{e}^{\mathrm{i}0} = \ldots$

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = 1$

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = 1$
- $e^{i\pi} = ...$

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = ...$

Valeurs à connaître

- $e^{i0} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Calculs avec les formes exponentielles

La forme exponentielle des nombres complexes « se manipule » de la même façon que la fonction exponentielle.

Calculs avec les formes exponentielles

Propriété

$$\boxed{\overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \ldots\ldots\ldots}$$

Calculs avec les formes exponentielles

Propriété

$$\boxed{\overline{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$$

Calculs avec les formes exponentielles

Propriété

$$\boxed{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = \ldots\ldots\ldots}$$

Calculs avec les formes exponentielles

Propriété

$$\boxed{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} = rr'\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')}}$$

Calculs avec les formes exponentielles

Propriété

$\boxed{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = \dots\dots\dots}$

Calculs avec les formes exponentielles

Propriété

$$\boxed{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n = r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}$$

Calculs avec les formes exponentielles

Propriété

$$\boxed{\frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \ldots\ldots\ldots}$$

Calculs avec les formes exponentielles

Propriété

$$\boxed{\frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$$

Calculs avec les formes exponentielles

Propriété

$$\boxed{\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \ldots\ldots\ldots}$$

Calculs avec les formes exponentielles

Propriété

$$\boxed{\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{r'\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}} = \frac{r}{r'}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\theta')}}$$

Exemples

Simplifier : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemples

Réponse : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x+(-\mathrm{i}x)} = \mathrm{e}^{0} = 1.$

Exemples

Simplifier : $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}{5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Exemples

Réponse : $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi - \frac{\pi}{3})} = \dfrac{2}{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$.

Exemples

Simplifier : $3e^{i\frac{\pi}{3}}.2e^{i\frac{\pi}{4}} = ...$

En déduire $\cos(\frac{7\pi}{12})$ et $\sin(\frac{7\pi}{12})$.

Exemples

Réponse : $3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = 6\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$,

Comme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

alors on obtient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$$

donc $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exemples

Résoudre l'équation : $z^2 = 4\mathrm{i}$ en posant $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

Exemples

En posant $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on a ,

$$z^2 = 4\mathrm{i} \iff r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

$$\iff r^2 = \ldots\ldots \text{ et } 2\theta = \ldots\ldots\ldots$$

$$\iff r = \ldots\ldots \text{ et } \theta = \ldots\ldots\ldots$$

Exemples

En posant $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, on a ,

$z^2 = 4\mathrm{i} \iff r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

$\iff r^2 = ...$ et $2\theta = ...$

$\iff r = ...$ et $\theta = ...$

L'équation a donc deux solutions : $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$ et $z_1 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{4}} = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\mathrm{i}$.

On peut facilement retrouver grâce à la formule d'Euler les formules d'addition des cosinus et des sinus qui ont servies à établir qu'un argument d'un produit de deux complexes est égal à la somme des arguments.

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$

$= (\cos a + \mathrm{i} \sin a) \times (\cos b + \mathrm{i} \sin b) = \ldots\ldots\ldots$