Géométrie dans l'espace

Vecteurs et applications

6 mai 2020

On étend à l'espace

- la notion de vecteur définie dans le plan,
- les opérations
- les propriétés

Caractérisation d'une droite

Propriété 1.

Soient A et B deux points distincts de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels qu'il existe un réel k vérifiant $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.
Rappel : on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Caractérisation d'un plan

Propriété 2.

Soient dans l'espace, un point A et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires.
L'ensemble des points M de l'espace tels que l'on a $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$ où x et y sont des réels, est le plan (ABC), tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$.

Définition 1.

Dire que trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont **coplanaires** signifie que les points A, B, C et D de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ appartiennent au même plan.

Propriété 3.

Trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires

si et seulement si

deux d'entre eux sont colinéaires ou s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{w} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v}$

si et seulement si

il existe trois réels non tous nuls α, β et γ tels que :

$$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$$

Définition 2.

On dit alors que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dirigent le plan (ABC) ou qu'ils forment un couple de **vecteurs directeurs** du plan (ABC).

Propriété 4.

Utilisation : Droite parallèle à un plan

Soient A, B, C trois points non alignés et E et F deux points distincts. La droite (EF) est parallèle au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. Il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{EF} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

Propriété 5.

Si deux plans sont dirigés par un même couple de vecteurs, alors ils sont parallèles.