Correction Baccalauréat Blanc
Terminale S
Mercredi 11 mars 2020

Exercice 1 :

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) à l'inconnue z :

$$z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2+\left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z+8\mathrm{i}=0\quad(E).$$

(a) $(-2\mathrm{i})^3+\left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)\times(-2\mathrm{i})^2+\left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\times(-2\mathrm{i})+8\mathrm{i}$
$=8\mathrm{i}+\left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)\times(-4)+\left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\times(-2\mathrm{i})+8\mathrm{i}$
$=8\mathrm{i}+8\sqrt{3}-8\mathrm{i}-8\mathrm{i}-8\sqrt{3}+8\mathrm{i}=\boxed{0}$.
$-2\mathrm{i}$ est donc bien une solution de l'équation (E).

(b) Pour tout $z\in\mathbb{C}$, $(z+2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)=z^3-2\sqrt{3}z^2+4z+2\mathrm{i}z^2-4\sqrt{3}\mathrm{i}z+8\mathrm{i}$ $=z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2+\left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z+8\mathrm{i}$. Donc : $z^3+\left(-2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\right)z^2+\left(4-4\mathrm{i}\sqrt{3}\right)z+8\mathrm{i}=(z+2i)\left(z^2-2\sqrt{3}z+4\right)$.

(c) Dans $\mathbb{C}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, un l'un des facteurs est nul.
On a :
- $z+2\mathrm{i}=0$ donc $z_1=-2\mathrm{i}$
- $z^2-2\sqrt{3}z+4=0$
$\Delta=(-2\sqrt{3})^2-4\times4=12-16=-4<0$; l'équation a deux solutions complexes conjuguées.
$z_2=\dfrac{2\sqrt{3}-(2\mathrm{i})}{2}=\sqrt{3}-\mathrm{i}$ et $z_3=\overline{z_2}=\sqrt{3}+\mathrm{i}$

Les solutions de (E) sont : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-2\mathrm{i}\ ;\ \sqrt{3}-\mathrm{i}\ ;\ \sqrt{3}+\mathrm{i}\right\}}$.

(d)
- De manière évidente : $|-2\mathrm{i}|=2$ et $\arg(-2\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{2}\pmod{2\pi}$ donc : $z_1=2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)\right)$.
- Pour $z_2=\sqrt{3}-\mathrm{i}$:
$\left|\sqrt{3}-\mathrm{i}\right|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$ et en appelant $\theta_2=\arg(z_2)\pmod{2\pi}$
$\begin{cases}\cos(\theta_2)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(\theta_2)=\dfrac{-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\theta_2=-\dfrac{\pi}{6}\pmod{2\pi}$ à justifier en traçant le cercle trigonométrique.
Donc $z_2=2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=2\left(\cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)\right)$.
- $z_3=\overline{z_2}=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$.

2. *Dans la suite, on se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine* O.
On considère les points A, B, C d'affixes respectives $-2i$, $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ et $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

(a) On a $|z_1|=2$; $|z_2|=2$ et $|z_3|=|\overline{z_2}|=2$ donc $\boxed{OA=OB=OC=2}$.
A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.

(b) Voir figure en fin d'exercice.

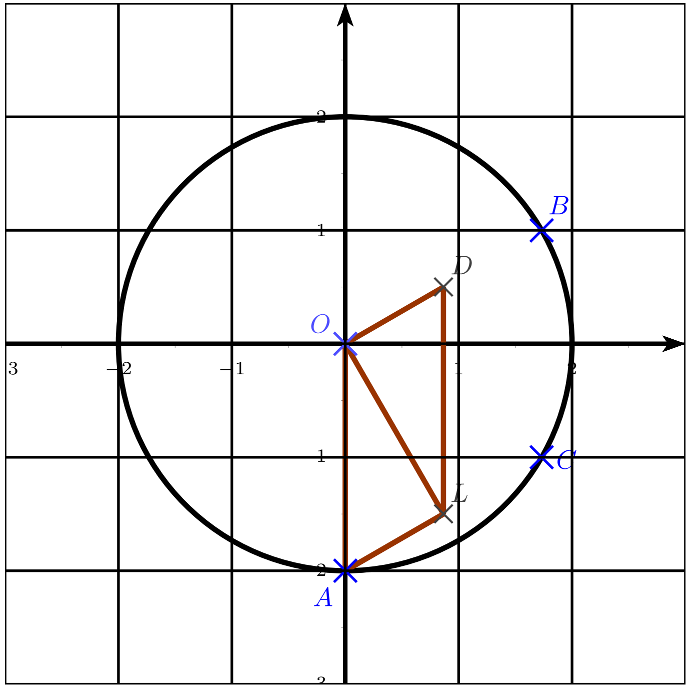
(c) AODL est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{LD}\iff -z_A=z_D-z_L\iff z_A=z_L-z_D$ donc $z_L=z_A+z_D=z_A+\dfrac{1}{2}z_B=-2\mathrm{i}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}}$.

3. On rappelle que, dans un repère orthonormé du plan, deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\ ;\ y)$ et $(x'\ ;\ y')$ sont orthogonaux si et seulement si $xx'+yy'=0$.

(a) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan, d'affixes respectives z et z'.
$z\overline{z'}=(x+\mathrm{i}y)(x'-\mathrm{i}y')=xx'+yy'+\mathrm{i}(x'y-xy')$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $xx'+yy'=0\iff\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right)=0$, donc si, et seulement si, $z\overline{z'}$ est un imaginaire pur.

(b) L'affixe du vecteur $\overrightarrow{OL}$ est $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$.
Celle du vecteur $\overrightarrow{AL}$ est $z'=z_L-z_A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}+2\mathrm{i}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.
Alors : $z\overline{z'}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)=\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}-\dfrac{3}{4}=-\sqrt{3}\mathrm{i}\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{AL}$ donc donc orthogonaux ; le triangle AOL est bien **rectangle** en L.

Figure



Exercice 2 :

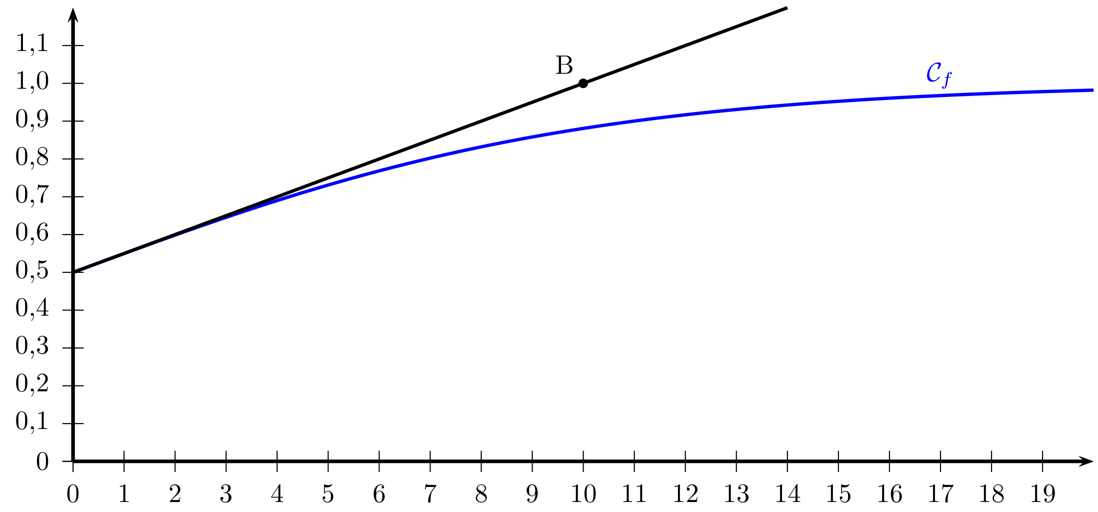
Partie A

Soit a et b des nombres réels. On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{a}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$

La courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.

La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A(0 ; 0,5). La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point B(10 ; 1).



1. La courbe de f passe par $A(0\ ;\ 0.5)$ donc en calculant $f(0) = \dfrac{a}{1+\mathrm{e}^{-b\times 0}} = \dfrac{a}{2}$ et sachant que ce nombre vaut $0,5$, on obtient $a = 1$.
   On obtient alors, pour tout réel $x \geqslant 0$,
   $$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-bx}}.$$
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée. f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ donc a pour dérivée $-\dfrac{v'}{v^2}$, avec $v(x) = 1 + e^{-bx}$ et $v'(x) = -be^{-bx}$. On obtient ainsi le résultat voulu en appliquant la formule de dérivation précédente.
3. La droite (AB) est la tangente en $A(0\ ;\ 0,5)$. Elle a pour coefficient directeur m égal à la dérivée de f en 0, à savoir $m = f'(0) = \dfrac{b}{4}$.
   Par ailleurs, le coefficient directeur de cette droite peut se calculer par la formule $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{1-0,5}{10-0} = 0,05$. Ainsi, $\dfrac{b}{4} = 0,05 \iff b = 4 \times 0,05 = 0,2$.
   Finalement $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}$.

Partie B

La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$p(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}}.$$

Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.

Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années.

Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

1. Cette proportion est $p(10) = \dfrac{1}{1+e^{-2}} \approx 0,88$.
2. (a) D'après la partie A, p est dérivable et sa dérivée est, en prenant $b = 0,2$,

$$p'(x) = \frac{0,2\mathrm{e}^{-0,2x}}{(1+\mathrm{e}^{-0,2x})^2}$$

Pour tout réel x positif, on a $0,2\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$ donc $p'(x) > 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. Ainsi, p est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\mathrm{e}^{-0,2x} = 1$ par propriété de l'exponentielle et composée de fonctions. Ainsi, on a, par quotient de limites

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = 1$$

(c) Dans le contexte de l'énoncé, plus les années x s'écoulent, plus la proportion $p(x)$ de personnes équipées augmentera jusqu'à atteindre les 100%. Ceci se traduit par la limite de la question précédente.

3. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95 %, le marché est saturé. On cherche en quelle année x la proportion $p(x)$ dépassera les 95 %. Il suffit de trouver le plus petit entier x satisfaisant $p(x) > 0,95$. Or, on a

$$\begin{aligned}
p(x) > 0,95 &\iff \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-0,2x}} > 0,95 \\
&\iff 0,95(1+\mathrm{e}^{-0,2x}) < 1 \\
&\iff 0,95\mathrm{e}^{-0,2x} < 0,05 \\
&\iff \mathrm{e}^{-0,2x} < \frac{0,05}{0,95} \\
&\iff \mathrm{e}^{-0,2x} < \frac{5}{95} \\
&\iff \mathrm{e}^{-0,2x} < \frac{1}{19} \\
&\iff -0,2x < \ln\frac{1}{19} && \text{la fonction ln est strictement croissante} \\
&\iff -0,2x < -\ln(19) \\
&\iff x > \frac{\ln(19)}{0,2} \approx 14,7 && \text{on divise par } -0,2 < 0.
\end{aligned}$$

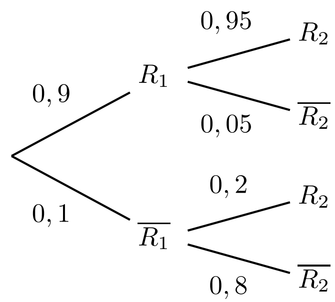
C'est au cours de l'année 2014, entre août et septembre, que le marché sera saturé..

Remarque : on pourrait procéder par « tâtonnements », et voir que ça marche à partir de $x = 15$, mais il faut tout de même l'expliquer par l'inéquation $p(x) > 0,95$ et ajouter que la fonction p est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Exercice 3 :

1. (a)

L'énoncé donne $p(R_1) = 0,9$, $p_{R_1}(R_2) = 0,95$ et $p_{\overline{R_1}}(R_2) = 0,2$.



(b)

On cherche $p(R_1 \cap R_2)$

$p(R_1 \cap R_2) = p(R_1) \times p_{R_1}(R_2) = 0,9 \times 0,95 = 0,855$

(c)

On cherche $p(R_2)$

R_1 et $\overline{R_1}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned}
p(R_2) &= p(R_1 \cap R_2) + p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) \\
&= 0,855 + p\left(\overline{R_1}\right) \times p_{\overline{R_1}}(R_2) \\
&= 0,855 + 0,1 \times 0,2 \\
&= 0,875
\end{aligned}$$

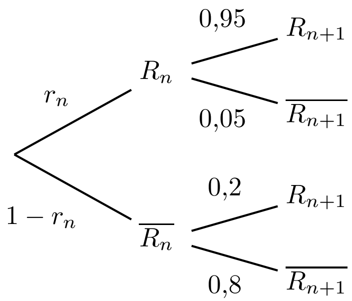
(d)

On cherche $p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right)$

$$p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) = \frac{p\left(\overline{R_1} \cap R_2\right)}{p(R_2)}$$

$$p_{R_2}\left(\overline{R_1}\right) = \frac{0,02}{0,875} = \frac{4}{175} \approx 0,023$$

2. (a)



(b)

R_n et $\overline{R_n}$ forment une partition de l'univers donc, d'après les probabilités totales on a :

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= p\left(R_{n+1}\right) \\ &= p\left(R_n \cap R_{n+1}\right) + p\left(\overline{R_n} \cap R_{n+1}\right) \\ &= p_{R_n}\left(R_{n+1}\right) \times p\left(R_n\right) + p_{\overline{R_n}}\left(R_{n+1}\right) \times p\left(\overline{R_n}\right) \\ &= 0,95 r_n + 0,2\left(1 - r_n\right) \\ &= 0,75 r_n + 0,2 \end{aligned}$$

(c)

On procède par récurrence

Initialisation : $r_1 = p\left(R_1\right) = 0,9$ et $0,1 \times 0,75^0 + 0,8 = 0,9$

Hérédité : Soit n un entier naturel non nul tel que $r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= 0,75 r_n + 0,2 \text{ d'après la question précédente} \\ &= 0,75\left(0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8\right) + 0,2 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= 0,1 \times 0,75^n + 0,6 + 0,2 \\ &= 0,1 \times 0,75^n + 0,8 \end{aligned}$$

On en déduit que la propriété est héréditaire à partir du rang 1 or elle est vérifiée à ce même rang.

Par le principe de récurrence on peut donc conclure que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ r_n = 0,1 \times 0,75^{n-1} + 0,8$

(d)

$-1 < 0,75 < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,75^{n-1} = 0$ et par opération sur les limites on a $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0,8$

On en déduit qu'avec le temps, la probabilité pour un client de rendre la bouteille se stabilise à 0,8.

Exercice 4 :

$$f(x) = \frac{2 + 3x}{4 + x}.$$

Partie A

1. $u_1 = f\left(u_0\right) = \dfrac{2 + 9}{4 + 3} = \dfrac{11}{7}$.
2. La fonction f est définie et dérivable sur $[0\,;\,4]$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = \dfrac{3(4 + x) - 1(2 + 3x)}{(4 + x)^2} = \dfrac{12 + 3x - 2 - 3x}{(4 + x)^2} = \dfrac{10}{(4 + x)^2}$
   Quotient de nombres positifs ce nombre dérivé est positif quel que soit x dans l'intervalle $[0\,;\,4]$. La fonction f est donc croissante sur $[0\,;\,4]$.
3. Démonstration par récurrence :
   Initialisation
   On a d'après la première question : $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 3$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
   Hérédité
   Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$; par croissance de la fonction f sur $[0\,;\,4]$, on
   $f(1) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(u_n\right) \leqslant f(3)$ ou car $f(1) = \dfrac{5}{5} = 1$ et $f(3) = \dfrac{11}{7} \leqslant 3$,
   $1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$: la relation est donc vraie au rang $n + 1$.
   Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang quelconque n il est vrai au rang suivant $n + 1$: d'après le principe de récurrence pour tout naturel n, $\quad 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 3$.
4. (a) D'après la question précédente la suite $\left(u_n\right)$ est décroissante, minorée par 1 : elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 1$.
   (b) On appelle ℓ la limite de la suite $\left(u_n\right)$; montrer l'égalité :
   $$\ell = \frac{2 + 3\ell}{4 + \ell}$$
   .
   (c) De l'égalité $u_{n+1} = f\left(u_n\right) = \dfrac{2 + 3u_n}{4 + u_n}$ on en déduit par continuité de la fonction f (puisque f est dérivable) :
   $$\ell = \frac{2 + 3\ell}{4 + \ell}.$$
   On en dédit que $\ell(4 + \ell) = 2 + 3\ell \iff \ell + \ell - 2 = 0$.
   Or $\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9 = 3^2$. Il y a deux solutions :
   $\ell_1 = \dfrac{-1 - 3}{2} = -2$ et $\ell_2 = \dfrac{-1 + 3}{2} = 1$.
   Comme $\ell \in [1\ ;\ 3]$, la seule solution est $\ell_2 = 1$.

Partie B

On considère la suite $\left(v_n\right)$ définie par :

$$v_0 = 0,1 \text{ et pour tout entier naturel } n,\ v_{n+1} = f\left(v_n\right).$$

1. Voir à la fin l'annexe. l'**annexe, à rendre avec la copie**.

   On peut conjecturer que la suite (v_n) est croissante et qu'elle a pour limite 1.

2. (a) $1 - v_{n+1} = 1 - \dfrac{2+3v_n}{4+v_n} = \dfrac{4+v_n-2-3v_n}{4+v_n} = \dfrac{2-2v_n}{4+v_n} = \dfrac{2}{4+v_n}(1-v_n)$.

   (b) Démonstration par récurrence :

   Initialisation pour $n=0$, $\quad 1-v_0 = 0,9$; or $\left(\dfrac{1}{2}\right)^0 = 1$.

   On a bien $0 \leqslant 1 - v_0 \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$.

   Hérédité Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on ait $1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   On a $1 - v_{n+1} = \dfrac{2}{4+v_n}(1-v_n)$, donc d'après l'hypothèse de récurrence :

   $1 - v_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{4+v_n} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

   Or $0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \iff v_n \geqslant 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqslant 0$; il suit que $4 + v_n \geqslant 4$, donc en prenant les inverses $0 \leqslant \dfrac{1}{4+v_n} \leqslant \dfrac{1}{4}$.

   On a donc $0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant 2 \times \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, soit finalement :

   $0 \leqslant 1 - v_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

   L'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai à un rang $n$quelconque il est vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

   quel que soit le naturel n, $\quad 0 \leqslant 1 - v_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

3. Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, donc l'encadrement trouvé à la question précédente montre que la la limite de $1 - v_n = 0$, donc :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 1.$$

Annexe