Vecteurs

Rappels : Cours : déjà recopié

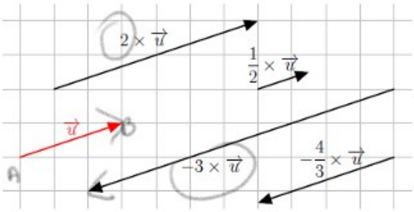
## 1. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel $k$

### 1.1. Définition générale

**Définition 1.**

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et $k$ un réel non nul, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ par :

- $A$, $B$ et $C$ sont alignés,
- si $k > 0$, $AC = kAB$ et $B$ et $C$ sont du même côté par rapport à $A$,
- Si $k < 0$, $AC = -kAB$ et $B$ et $C$ sont de part et d'autre de $A$.




**Remarque 1** Si $\vec{u} = 0$ ou $k = 0$ alors $\vec{v} = \vec{0}$

**Remarque 2** $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de $k$. $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$. avec $|k|$ correspondant à la valeur absolue de $k$ ( $k$ si $k > 0$ et $-k$ si $k < 0$)

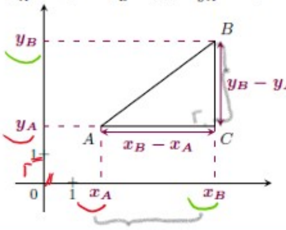
**Norme d'un vecteur**

**Propriété 1.**

Dans le plan muni d'un repère **orthonormé**, on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées des points $A$ et $B$. La distance entre deux points $A$ et $B$ est donnée par la formule suivante :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

**Illustration dans le cas où $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$**

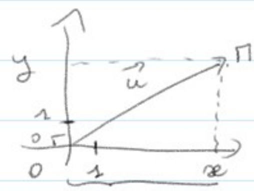



$AB^2 = AC^2 + BC^2$
(th. de Pythagore)
$= (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_C)^2$
$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

**Propriété 2.**

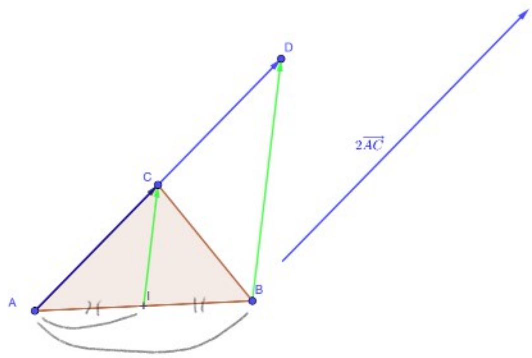
Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère du plan.

Le vecteur $\vec{u}$ a pour norme : $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.




Exercice 65 page 110

**65** **a.** Tracer un triangle ABC.
Placer le milieu I du segment [AB] et le point D vérifiant $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.
**b.** Prouver que $\overrightarrow{IC} = -0{,}5\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
**c.** Démontrer que $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
**d.** Les droites (IC) et (BD) sont-elles parallèles ?




b) $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles)

I mil du [AB] : $\overrightarrow{IA} = -0{,}5\,\overrightarrow{AB}$.

donc $\overrightarrow{IC} = -0{,}5\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

c) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ (relation de Chasles)

$= -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ car C milieu de [AD].

d) $\overrightarrow{IC} = -0{,}5\,\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ $\times 2$

donc $\overrightarrow{BD} = 2 \times \overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{IC}$ sont dits colinéaires

↳ ils ont m̂ direction : donc (BD) et (IC) sont parallèles

# Multiplication d'un vecteur par un reel

Diapositives  de réactivation de la notion de vecteurs.

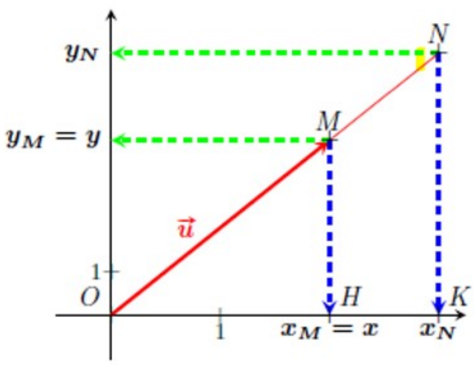
## 1.2. Coordonnées vectorielles

**Propriété 1.**

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère du plan et $k$ un réel .

On admet que le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans ce même repère .

**Illustration quand $k > 0$ et $x > 0$ et $y > 0$.**




On suppose $\vec{u} \neq \vec{0}$.
On appelle :
$M$ le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et,
$N$ le point tel que $k\vec{u} = \overrightarrow{ON}$.

Alors : $\dfrac{ON}{OM} = k$.(Attention, c'est un quotient de distances et NON de vecteurs !)

k est supposé positif dans cette démonstration. Comme les coordonnées s'obtiennent grâce aux parallèles aux axes, on peut appliquer **le théorème de Thalès** et on obtient :

$$\frac{x_N}{x_M} = \frac{OK}{OH} = \frac{ON}{OM} = k.$$

$$\frac{x_N}{x_M} = \frac{ON}{OM} = k$$

$$x_N = k \times x_M.$$

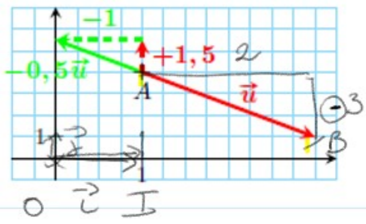
D'où $x_N = kx_M = kx$.

De même, $y_N = ky_M = ky$

**Remarque 1.** *$N$ est l'image de $M$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$.*

**Exemple :** Dans un repère orthogonal, construire le représentant d'origine $A(1;4)$ du vecteur $-0,5\vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Donc $-0,5\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -0,5 \times 2 \\ -0,5 \times (-3) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$.




Autre ex :

$\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-3)} -3\vec{u}\begin{pmatrix} -12 \\ -6 \end{pmatrix}$

$(O; I; J) \rightarrow (O; \vec{i}; \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$

**Propriété 2.**

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\binom{x}{y}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad x\vec{i}\begin{pmatrix} x \times 1 \\ x \times 0 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad y\vec{j}\begin{pmatrix} y \times 0 \\ y \times 1 \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$

$\underbrace{x\vec{i} + y\vec{j}}_{= \vec{u}} \begin{pmatrix} x + 0 \\ 0 + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

les coord de $\vec{u}$ sont uniques.

### 1.3. Règles opératoires

**Propriété 3.**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et et tous réels $k$ et $k'$, on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

Ces propriétés se montrent facilement avec les coordonnées et résultent des propriétés sur les nombres réels.

Ces propriétés ont été mises en évidence dans l'exercice 12 des fiches à travailler avant les vacances.

Cours : coordonnees du milieu

### 1.4. Application : Coordonnées du milieu d'un segment

**Propriété 4.**

Dans le plan muni d'un repère, on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées de $A$ et $B$.
Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont données par la formule suivante :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Cette propriété est valable dans n'importe quel type de repère.

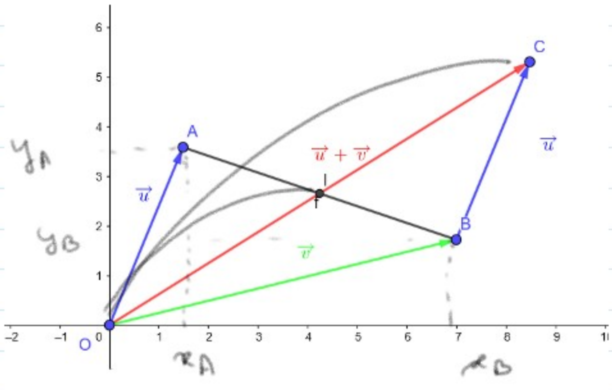
$I$ = milieu de $[AB]$

$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$.

donc $\underbrace{OBCA}$ est un parallélogramme

et $I$ est aussi le milieu de $[OC]$.

$\vec{OI} = \frac{1}{2}\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.




$\vec{OA} + \vec{OB} \begin{pmatrix} x_A + x_B \\ y_A + y_B \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ a pour coord $\begin{pmatrix} \frac{x_A + x_B}{2} \\ \frac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$

EXERCICE 1.
Dans un repère $(O; I, J)$, on donne les points de coordonnées suivants :
$R(-1;4)$ ; $S(-2;1)$ ; $T(3;0)$ et $U(4;3)$.

1. Placer les points dans le repère $(O; I, J)$.
2. Calculer les coordonnées du milieu du segment $[RT]$ puis du segment $[SU]$. Conclure.

le milieu de $[RT]$ a pour coordonnées $\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{4+0}{2}\right)$ soit $(1;2)$

celui de $[SU]$ a pour coordonnées $\left(\frac{-2+4}{2}; \frac{1+3}{2}\right)$ soit $(1;2)$

les coord sont égales, donc $[RT]$ et $[SU]$ ont même milieu et

RUTS est donc un parallélogramme.