A faire : 66 page 110

66 ABCD est un parallélogramme.

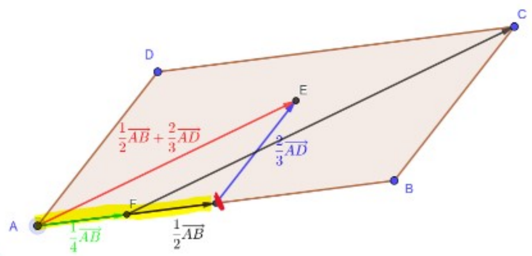
Les points **E** et **F** sont définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}.$$

a. Faire une figure.

b. Démontrer que $\overrightarrow{FC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

c. Les droites (AE) et (FC) sont-elles parallèles ?



b) $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ relation de Chasles

$\overrightarrow{FC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ car ABCD parallélogramme

$\overrightarrow{FC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}$.

c) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. $\times \frac{2}{3}$

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ et $1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} \times \overrightarrow{FC} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD}\right)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \times 1\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont colinéaires : ils ont même direction ; donc (AE) et (FC) sont parallèles.

Cours : colinearite

2. Colinéarité

2.1. Définition

Définition 2.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque 2. *Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur* $\vec{u}$. $\vec{0} = 0 \times \vec{u}$

2.2. Notion de déterminant

Propriété 5.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Dire que $xy' - x'y = 0$ équivaut à dire que $\left\{\begin{array}{c}\text{il existe un réel k tel que} \vec{v} = k\vec{u} \\ OU \\ \vec{u} = \vec{0}\end{array}\right.$

$\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ colinéaires

$\Leftrightarrow$ les coord sont proportionnelles

$\Leftrightarrow$

x	x'
y	y'

tableau de proportionnalité

$\Leftrightarrow$ $xy' = yx'$

$\Leftrightarrow$ $xy' - yx' = 0$

Définition 3.

La différence des produits $x.y' - x'.y$ est appelée déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note dét $(\vec{u}\,,\,\vec{v})$. Il faut savoir que : dét $(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Propriété 6.

Conséquence : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement leur déterminant est nul.

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires, il suffit de :

possibilité 1 trouver un réel k non nul tel que $x' = kx$ et $y' = ky$;

possibilité 2 vérifier que le déterminant , $xy' - x'y$ est nul.

Cours : application

3. Application

Propriété 7.

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemples d'utilisation :

1. Soit $A(-2;1)$, $B(3;5)$, $C(6;8)$ et $D(-4;0)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. $A(-2;1)$, $B(3;5)$ et $C(6;7,4)$ sont-ils alignés ?
3. $A(1;2)$; $B(3;1)$ et $C(5;3)$ sont-ils alignés ?

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-2)\\5-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-4-6\\0-8\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-10\\-8\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix}5 & -10\\4 & -8\end{vmatrix} = 5\times(-8) - 4\times(-10) = 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}$ ne sont pas égaux donc ABCD est un trapèze.

2) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-(-2)\\5-1\end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-(-2)\\7,4-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\6,4\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix}5 & 8\\4 & 6,4\end{vmatrix} = 5\times6,4 - 4\times8 = 32-32 = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc (AB) et (AC) sont parallèles avec A en commun donc A, B, C alignés.

3) $A(1;2)$ $B(3;1)$ $C(5;3)$ sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\1-2\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}5-3\\3-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) = \begin{vmatrix}2 & 2\\-1 & 2\end{vmatrix} = 2\times2-(-1)\times2 = 4+2 = 6 \neq 0$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ne sont pas colinéaires donc A, B, C ne sont pas alignés

(On aurait pu observer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont m̂ abscisse et pas la m̂ ordonnée donc les coord. ne sont pas proportionnelles

Corrige

Réponses :

1. Comme le quadrilatère pourrait être un parallélogramme, on commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ puis le déterminant.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et, $\quad \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-4) \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.
   dét $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{DC}) = 5 \times 8 - 4 \times 10 = -40 - (-40) = 0$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont donc colinéaires. On peut en conclure que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Comme $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, le quadrilatère $ABCD$ n'est pas un parallélogramme mais il a deux cotés parallèles, c'est donc un trapèze.

2. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le déterminant.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et, $\quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-2) \\ 7,4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6,4 \end{pmatrix}$
   dét $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}) = 5 \times 6,4 - 8 \times 4 = 32 - 32 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires.
   Les droites (AB) et (AC) sont parallèles, avec le point A en commun, on peut donc en conclure que les points A, B et C sont alignés.

3. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le déterminant.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et, $\qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
   dét $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}) = 2 \times 1 - (-1) \times 4 = 2 - (-4) = 6 \neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires.

   Donc A, B, C ne sont pas alignés.

Exercice 74 page 111

74 On donne E(6 ; −2), F(1 ; 3) et $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$.

a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{EF}$.

b. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont-ils colinéaires ?

c. Calculer la norme de $\vec{u}$ et celle de $\overrightarrow{EF}$.

a) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}1-6\\3-(-2)\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$

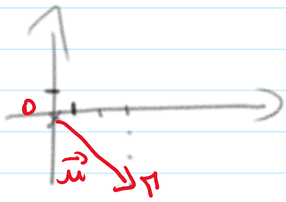
b) $\text{dét}(\overrightarrow{EF},\vec{u}) = \begin{vmatrix}-5 & 3\\5 & -3\end{vmatrix} = (-5)\times(-3) - 5\times 3$
$= 0$

$\overrightarrow{EF}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{\times \frac{3}{-5}} \vec{u}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

$\times -\frac{3}{5}$

$-\frac{3}{5}\overrightarrow{EF} = \vec{u}$



c) norme de $\vec{u}$: $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = \sqrt{9\times 2}$
$= \sqrt{9}\times\sqrt{2}$
$= 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$ norme de $\overrightarrow{EF} = \|\overrightarrow{EF}\| = \sqrt{(-5)^2+5^2} = \sqrt{50} = \sqrt{25\times 2} = \sqrt{25}\times\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.