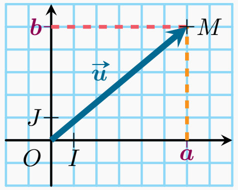
Compléments sur les vecteurs : coordonnées et colinéarité.

1. Coordonnées

1.1. Coordonnées d'un vecteur

Définition 1.

Dans un repère $(O; I, J)$, on considère la translation de vecteur $\vec{u}$ qui translate l'origine O en un point M de coordonnées $(a; b)$.
Dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j})$, les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M. On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



Propriété 1.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

Propriété 2.

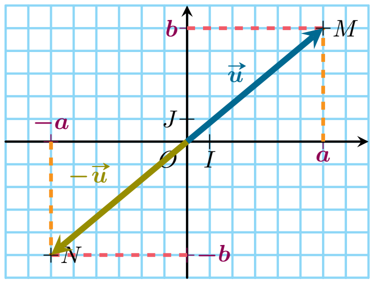
Si les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}\,;\vec{j})$ alors la norme du vecteur $\vec{u}$ vaut

$$\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

.

Propriété 3.

Si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors le vecteur opposé a pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ dans la même base.



Propriété 4.

Dans un repère $(O; I, J)$, si le point A a pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}).$$

.

preuve Soit A, B et M de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ et $(x_M; y_M)$ dans un repère $(O; I, J)$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $OMBA$ est un parallélogramme.

Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont même milieu.

$$\begin{cases} \dfrac{x_A + x_M}{2} = \dfrac{x_B + x_O}{2} \\ \dfrac{y_A + y_M}{2} = \dfrac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$$

On retrouve la propriété :
Dans le plan muni d'un repère **orthonormé**, si on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées des points A et B, la distance entre deux points A et B est donnée par la formule suivante :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

1.2. Coordonnées du vecteur somme

Propriété 5.

Somme de deux vecteurs : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,
alors les coordonnées du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$. dans la même base.

Conséquence : Coordonnées du vecteur différence

Définition 2.

Soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

Propriété 6.

Différence de deux vecteurs : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,
alors les coordonnées du vecteur différence $\vec{u} - \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$. dans la même base.

methode Repérer un point défini par une somme vectorielle
Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on place les points $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(5; 3)$ et $D(-2; -1)$.
Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$?
On cherche les coordonnées $(x_E; y_E)$ du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
Donc le couple $(x_E; y_E)$ est solution du système :

$$\begin{cases} x_E - x_A = (x_D - x_A) + (x_B - x_C) \\ y_E - y_A = (y_D - y_A) + (y_B - y_C) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_E - 2 = (-2 - 2) + (4 - 5) \\ y_E - 3 = (-1 - 3) + (-1 - 3) \end{cases} \text{ soit }$$

$$\begin{cases} x_E - 2 = -5 \\ y_E - 3 = -8 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_E = -5 + 2 = -3 \\ y_E = -8 + 3 = -5 \end{cases}$$

Les coordonnées du point E sont $(-3; -5)$.

2. Multiplication par un réel

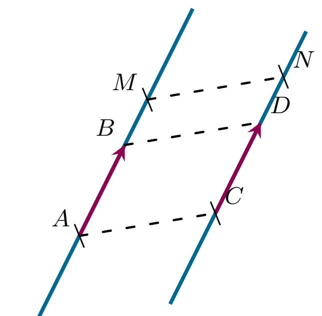
2.1. Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel. Soient A, B, C et D quatre points tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$.
On note :

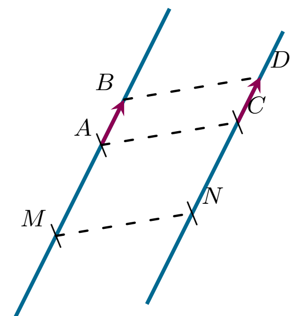
- M le point d'abscisse k de la droite (AB) munie du repère $(A; \vec{u})$ et,

- N le point d'abscisse k de la droite (CD) munie du repère $(C; \vec{u})$.

On admet que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CN}$.



$k > 0$
Sur la figure, $k = 1,5$



$K < 0$
Sur la figure, $k = -2$

Définition 3.

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$:soient A et B deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, alors le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$ où M est le point d'abscisse k de la droite (AB) munie du repère $(A; \overrightarrow{AB})$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$: on définit $k\vec{u} = \vec{0}$.

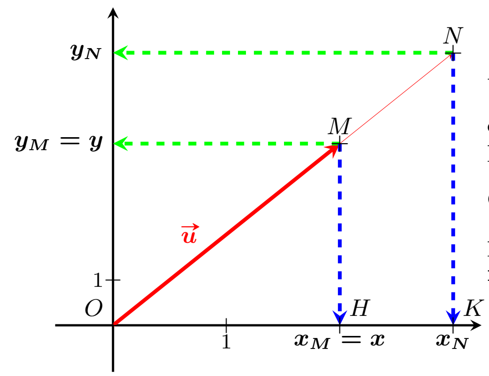
Remarque 1. *$\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de k. $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$. avec $|k|$ correspondant à la valeur absolue de k (k si $k > 0$ et $-k$ si $k < 0$)*

Propriété 7.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère du plan et k un réel .

On admet que le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$dans ce même repère .

Illustration quand $k > 0$ et $x > 0$ et $y > 0$.



On suppose $\vec{u} \neq \vec{0}$.
On appelle :
M le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et,
N le point tel que $k\vec{u} = \overrightarrow{ON}$.
Alors : $\dfrac{ON}{OM} = k$.(Attention, c'est un quotient de distances et NON de vecteurs !)
k est supposé positif dans cette démonstration.

Comme les coordonnées s'obtiennent grâce aux parallèles aux axes, on peut appliquer **le théorème de Thalès** et on obtient :

$$\frac{x_N}{x_M} = \frac{OK}{OH} = \frac{ON}{OM} = k.$$

D'où $x_N = kx_M = kx$.

De même, $y_N = ky_M = ky$

Remarque 2. *N est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.*

Propriété 8.

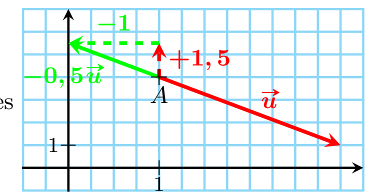
Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Preuve : Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère du plan $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

Comme $\vec{i}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans ce même repère et $\vec{j}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le vecteur $x\vec{i} + y\vec{j}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Or, deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même coordonnées donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. La base $(\vec{i}, \vec{j})$ suffit donc pour donner les coordonnées d'un vecteur.

Exemple : Dans un repère orthogonal, construire le représentant d'origine $A(1; 4)$ du vecteur $-0,5\vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Donc $-0,5\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -0,5 \times 2 \\ -0,5 \times (-3) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$.



2.2. Règles opératoires

Propriété 9.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et et tous réels k et k', on a :

- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$.
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$.
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

Ces propriétés se montrent facilement avec les coordonnées et résultent des propriétés sur les nombres réels.

2.3. Colinéarité

Définition 4.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque 3. *Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.*

Propriété 10.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Dire que $xy'-x'y=0$ équivaut à dire que $\left\{\begin{array}{c}\text{il existe un réel k tel que}\vec{v}=k\vec{u}\\ OU\\ \vec{u}=\vec{0}\end{array}\right.$

Démonstration :

Partie 1 : On montre que s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou que si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $xy'-x'y=0$.

- Si $\vec{u}=\vec{0}$, alors $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, alors $0\times y' - x'\times 0 = 0$.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$, alors il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$. Dans ce cas : $\left\{\begin{array}{l}x'=kx\\ y'=ky\end{array}\right.$

  $xy'-x'y = xky-kxy = kxy-kxy = 0$.

Partie 2 : La réciproque. Si $xy'-x'y=0$, alors soit $\vec{u}$ est nul (correspond à une des possibilités), soit il ne l'est pas et alors l'une au moins de ses coordonnées est non nulle. Supposons $x\neq 0$, alors on pose $k=\dfrac{x'}{x}$. Comme $xy'-x'y=0$, on a : $xy'=x'y$ ou $y'=\dfrac{x'}{x}\times y$ et donc $y'=ky$.

Finalement, $\vec{v}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$. D'où, $\vec{v}=k\vec{u}$.

Supposons $x=0$, alors y est non nul et alors on pose $k=\dfrac{y'}{y.}$ Comme $xy'-x'y=0$, on a : $xy'=x'y$ ou $x\times\dfrac{y'}{y}=x'$ et donc $x\times k=x'$.

Finalement, $\vec{v}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$. D'où, $\vec{v}=k\vec{u}$

Définition 5.

La différence des produits $x.y'-x'.y$ est appelée déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note dét $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$. Il faut savoir que : dét $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = \begin{vmatrix}x & y\\ x' & y'\end{vmatrix} = xy'-x'y$

Propriété 11.

Conséquence : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement leur déterminant est nul.

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires, il suffit de :

possibilité 1 trouver un réel k non nul tel que $x'=kx$ et $y'=ky$;

possibilité 2 vérifier que le déterminant , $xy'-x'y$ est nul.

Soit $(O;I,J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-18\end{pmatrix}$.
2. $\vec{w}\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix}12\\-7\end{pmatrix}$.

Réponses :

1. $-6=-3\times 2$ et $-18=-3\times 6$ donc $\vec{v}=-3\vec{u}$.
   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
   ou
   dét $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 2\times(-18)-6\times(-6)=0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2. dét $(\vec{w}\ ,\ \vec{z}) = -5\times(-7)-3\times 12 = 35-36\neq 0$. Donc $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

Propriété 12.

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemples d'utilisation :

1. Soit $A(-2;1)$, $B(3;5)$, $C(6;8)$ et $D(-4;0)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. $A(-2;1)$, $B(3;5)$ et $C(6;7,4)$ sont-ils alignés ?
3. $A(1;2)$; $B(3;1)$ et $C(5;3)$ sont-ils alignés ?

Réponses :

1. Comme le quadrilatère pourrait être un parallélogramme, on commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ puis le déterminant.
   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et, $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-4) \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.
   dét $(\overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{DC}) = 5 \times 8 - 4 \times 10 = -40 - (-40) = 0$.
   Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont donc colinéaires. On peut en conclure que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Comme $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, le quadrilatère $ABCD$ n'est pas un parallélogramme mais il a deux cotés parallèles, c'est donc un trapèze.

2. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le déterminant.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-2) \\ 7,4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6,4 \end{pmatrix}$
   dét $(\overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{AC}) = 5 \times 6,4 - 8 \times 4 = 32 - 32 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires.
   Les droites (AB) et (AC) sont parallèles, avec le point A en commun, on peut donc en conclure que les points A, B et C sont alignés.

3. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le déterminant.

   $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$
   dét $(\overrightarrow{AB}\ , \overrightarrow{AC}) = 2 \times 1 - (-1) \times 4 = 2 - (-4) = 6 \neq 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires.

   Donc A, B, C ne sont pas alignés.