2.2. Règles opératoires

Propriété 9.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et et tous réels k et k', on a :

- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

Ces propriétés se montrent facilement avec les coordonnées et résultent des propriétés sur les nombres réels.

2.3. Colinéarité

Définition 4.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque 3. *Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.*

Propriété 10.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Dire que $xy' - x'y = 0$ équivaut à dire que $\left\{\begin{array}{c} \text{il existe un réel k tel que} \vec{v} = k\vec{u} \\ OU \\ \vec{u} = \vec{0} \end{array}\right.$

Démonstration :

Partie 1 : On montre que s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou que si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $xy' - x'y = 0$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $0 \times y' - x' \times 0 = 0$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Dans ce cas : $\left\{\begin{array}{l} x' = kx \\ y' = ky \end{array}\right.$

  $xy' - x'y = xky - kxy = kxy - kxy = 0$.

Partie 2 : La réciproque. Si $xy' - x'y = 0$, alors soit $\vec{u}$ est nul (correspond à une des possibilités), soit il ne l'est pas et alors l'une au moins de ses coordonnées est non nulle. Supposons $x \neq 0$, alors on pose $k = \dfrac{x'}{x}$. Comme $xy' - x'y = 0$, on a : $xy' = x'y$ ou $y' = \dfrac{x'}{x} \times y$ et donc $y' = ky$.

Finalement, $\vec{v}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. D'où, $\vec{v} = k\vec{u}$.

Supposons $x = 0$, alors y est non nul et alors on pose $k = \dfrac{y'}{y.}$ Comme $xy' - x'y = 0$, on a : $xy' = x'y$ ou $x \times \dfrac{y'}{y} = x'$ et donc $x \times k = x'$.

Finalement, $\vec{v}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. D'où, $\vec{v} = k\vec{u}$

Définition 5.

La différence des produits $x.y' - x'.y$ est appelée déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note dét $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}\ )$. Il faut savoir que : dét $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Propriété 11.

Conséquence : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement leur déterminant est nul.

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, il suffit de :

possibilité 1 trouver un réel k non nul tel que $x' = kx$ et $y' = ky$;

possibilité 2 vérifier que le déterminant , $xy' - x'y$ est nul.

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Réponses :

1. $-6 = -3 \times 2$ et $-18 = -3 \times 6$ donc $\vec{v} = -3\vec{u}$.

   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.
   ou
   dét $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = 2 \times (-18) - 6 \times (-6) = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2. dét $(\vec{w}\ ,\ \vec{z}) = -5 \times (-7) - 3 \times 12 = 35 - 36 \neq 0$. Donc $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

Propriété 12.

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemples d'utilisation :