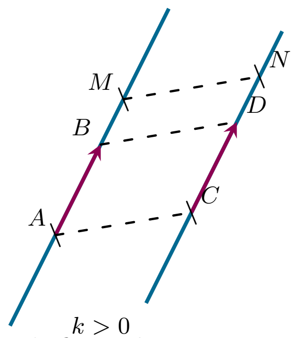
2. Multiplication par un réel

2.1. Définition

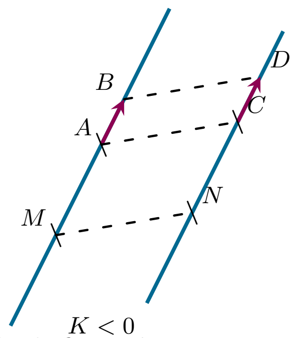
Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel. Soient A, B, C et D quatre points tels que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$.
On note :

- M le point d'abscisse k de la droite (AB) munie du repère $(A; \vec{u})$ et,
- N le point d'abscisse k de la droite (CD) munie du repère $(C; \vec{u})$.

On admet que : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CN}$.



$k > 0$
Sur la figure, $k = 1,5$



$K < 0$
Sur la figure, $k = -2$

Définition 3.

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$:soient A et B deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, alors le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$ où M est le point d'abscisse k de la droite (AB) munie du repère $(A; \overrightarrow{AB})$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$: on définit $k\vec{u} = \vec{0}$.

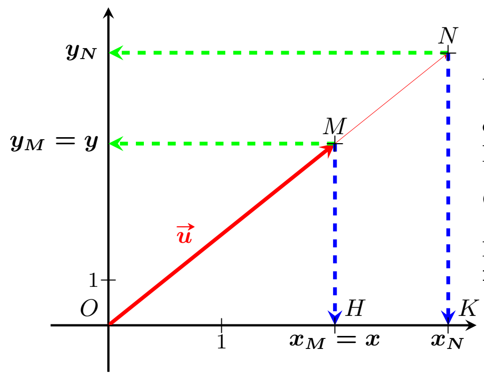
Remarque 1. *$\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de k. $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$. avec $|k|$ correspondant à la valeur absolue de k (k si $k > 0$ et $-k$ si $k < 0$)*

Propriété 7.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère du plan et k un réel .

On admet que le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$dans ce même repère .

Illustration quand $k > 0$ et $x > 0$ et $y > 0$.



On suppose $\vec{u} \neq \vec{0}$.
On appelle :
M le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et,
N le point tel que $k\vec{u} = \overrightarrow{ON}$.
Alors : $\dfrac{ON}{OM} = k$.(Attention, c'est un quotient de distances et NON de vecteurs !)
k est supposé positif dans cette démonstration.

Comme les coordonnées s'obtiennent grâce aux parallèles aux axes, on peut appliquer **le théorème de Thalès** et on obtient :

$$\frac{x_N}{x_M} = \frac{OK}{OH} = \frac{ON}{OM} = k.$$

D'où $x_N = kx_M = kx$.

De même, $y_N = ky_M = ky$

Remarque 2. *N est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.*

Propriété 8.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Preuve : Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère du plan $(0; \vec{i}, \vec{j})$.
Comme $\vec{i}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans ce même repère et $\vec{j}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le vecteur $x\vec{i} + y\vec{j}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Or, deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même coordonnées donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. La base $(\vec{i}, \vec{j})$ suffit donc pour donner les coordonnées d'un vecteur.

Exemple : Dans un repère orthogonal, construire le représentant d'origine $A(1; 4)$ du vecteur $-0,5\vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.
Donc $-0,5\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -0,5 \times 2 \\ -0,5 \times (-3) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$.