III Les irrationnels

Proposition 3

$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Démonstration en raisonnant par l'absurde.
Démontrons en raisonnant par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer vrai un énoncé que l'on sait faux et, à force de raisonnements, montrer que cette supposition conduit à une incohérence. Le procédé rhétorique similaire est appelé *reductio ad absurdum.*

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Il faut interpréter ceci en utilisant la définition du nombre rationnel.
Il existe donc des entiers naturels p et q avec q non nul tels que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
Donc, en multipliant par q de part et d'autre dans l'égalité : $q\sqrt{2} = p$.
Nous allons nous ramener à l'arithmétique en utilisant des entiers naturels.

$$\left(q\sqrt{2}\right)^2 = p^2$$

nous en déduisons successivement :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}\right)^2 q^2 &= p^2\\ 2q^2 &= p^2\end{aligned}$$

Donc p^2 est pair. Nécessairement p est donc pair : il existe k tel que $p = 2k$.
Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned}2q^2 &= (2k)^2\\ 2q^2 &= 4k^2\\ q^2 &= 2k^2\end{aligned}$$

Donc q^2 et q sont pairs.

Nous avons obtenus ici une incohérence.
Si p et q sont pairs c'est qu'ils ont un diviseur commun : 2. La fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible ce qui contredit notre hypothèse.

Nous avons démontré, en raisonnant par l'absurde, que nécessairement, $\sqrt{2}$ est irrationnel.