

II Les fractions et les nombres rationnels.

II-1 Rappels

Une *fraction* est le quotient (résultat d'une division) d'un entier a par un entier non nul b que nous notons $\frac{a}{b}$.

Les fractions sont donc des nombres. L'écriture décimale d'une fraction peut être finie ou infinie.

L'ensemble de toutes les fractions est appelé l'*ensemble des nombres rationnels* et est noté \mathbb{Q} (comme quotient).

Ainsi un nombre est dit rationnel s'il peut s'écrire sous forme d'une fraction.

Exemples.

1. Les nombres entiers sont des rationnels puisque, par exemple, $5 = \frac{5}{1}$.
2. Les nombres décimaux sont des rationnels, par exemple, $12,234 = \frac{12234}{1000}$.
3. $\frac{1}{2} = 0,5$ est un nombre rationnel dont l'écriture décimale est finie (donc c'est un nombre décimal). $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ est un nombre rationnel dont l'écriture décimale est infinie.

II-2 Exemple : $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3} = 0,333\dots$ est un nombre rationnel dont l'écriture décimale est infinie.

Proposition 1

$\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Raisonnement par l'absurde en disant qu'une nombre est décimal cela signifie que nous pouvons l'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.

II-3 Forme irréductible d'une fraction.

Le nombre $\frac{1}{2}$ peut encore s'écrire $\frac{2}{4}$. L'écriture fractionnaire d'un nombre n'est pas unique. Ceci pouvant produire de la confusion les mathématiciens ont retenu une écriture fractionnaire qui est unique : *la forme irréductible d'une fraction*.

Proposition 2

Tout nombre rationnel s'écrit de façon unique comme une fraction dont le numérateur et le dénominateur non pas d'autre commun diviseur que 1 (ou -1).

Exemples.

1. $\frac{1}{3}$ est une forme irréductible.
2. $\frac{14}{27}$ n'est pas une forme irréductible puisque 14 et 27 admettent 7 pour diviseur commun : $\frac{14}{27} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3}$.
3. En toute rigueur la forme irréductible de l'entier 5 devrait s'écrire $\frac{5}{1}$ cependant l'usage veut que nous usions de l'écriture la plus simple : 5.

Remarques.

1. Des nombres entiers qui n'ont pas de diviseur commun autre que 1 ou -1 sont dits *premiers entre eux*.
2. Dans la pratique pour trouver la forme irréductible nous utiliserons des décompositions en facteurs premiers (cf *infra*) ou la calculatrice si aucune justification n'est demandée.