Inéquations

1. inéquation du premier degré

1.1. Rappels sur les fonctions affines

Définition 1.

Soit m et p deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est une fonction affine.

EXEMPLES

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} - 3$ est une fonction affine avec $m = \dfrac{1}{2}$ et $p = -3$.
- La fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$ n'est pas une fonction affine.

1.11 cas particuliers

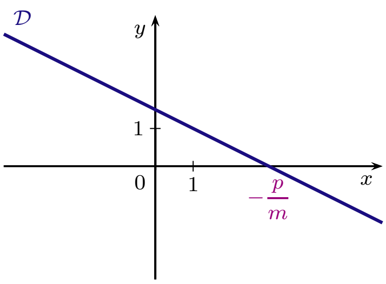
- Dans le cas où $p = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx$ est appelée fonction linéaire.
- Dans le cas où $m = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = p$ est une fonction constante.

1.2. courbe représentative

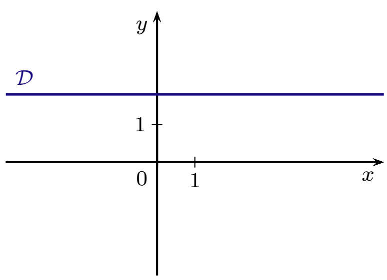
Propriété 1.

Soit m et p deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = mx + p$.

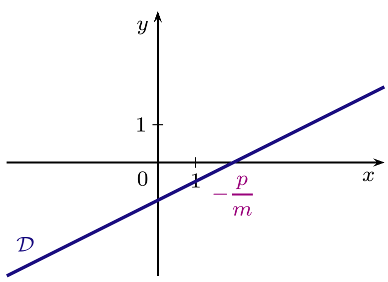
$m < 0$



$m = 0$



$m > 0$



1.3. variation

Propriété 2.

Soit m et p deux réels.

- Si m est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si m est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

1.4. signe de $mx + p$ avec $m \neq 0$

Propriété 3.

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$.
$f(x)$ est du signe de m pour les valeurs de x supérieures à $-\dfrac{p}{m}$.

Preuve
Si $m \neq 0$ alors l'équation $mx + p = 0$ admet pour solution $x = -\dfrac{p}{m}$.

Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
donc $x < -\dfrac{p}{m}$,
équivaut à $f(x) < f\left(-\dfrac{p}{m}\right)$
soit pour tout réel $x < -\dfrac{p}{m}$,
$f(x) < 0$ et réciproquement.
D'où le tableau du signe de $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:
donc $x < -\dfrac{p}{m}$,
équivaut à $f(x) > f\left(-\dfrac{p}{m}\right)$
soit pour tout réel $x < -\dfrac{p}{m}$,
$f(x) > 0$ et réciproquement.
D'où le tableau du signe de $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Par conséquent, si $m \neq 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x) = mx + p$		signe de $-m$	0	signe de m	

Exemple

x	$-\infty$		-3.5		$+\infty$	commentaires
$2x + 7$		$-$	0	$+$		$m = 2$ positif

Exemple

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{5}$		$+\infty$	commentaires
$-5x + 3$		$+$	0	$-$		$m = -2$ négatif