Activité 1: ***Un nouveau type d'équation.*** On considère l'équation $2x - y + 1 = 0$, qu'on note (E).

- Cette équation est une équation à deux inconnues, x et y qui représentent deux nombres réels.
- On dit qu'un couple (a ; b) est solution de cette équation si, en remplaçant x par a et y par b, l'égalité (E) est vérifiée.

1. On cherche d'abord des solutions à cette équation :
   a) Vérifier que les couples (1 ; 3) et (-2 ; -3) sont solutions de l'équation (E).
   b) Trouver la valeur de a telle que le couple (a ; 0) soit solution de l'équation (E).
   c) Trouver la valeur de b telle que le couple (0 ; b) soit solution de l'équation (E).
   d) Trouver un autre couple solution de (E). Combien de couples solutions peut-on trouver ?
2. On veut représenter graphiquement ces solutions.
   a) Représenter les cinq couples solutions trouvés dans un repère orthonormé, en faisant correspondre chaque couple solution (a ; b) au point de coordonnées (a ; b).
   b) Émettre une conjecture sur la position de ces points. Justifier.

a) $2 \times 1 - 3 + 1 = 0$
donc $(1 ; 3)$ est solution de (E)

$2 \times (-2) - (-3) + 1 = -4 + 3 + 1 = 0$
donc $(-2 ; -3)$ est solution de (E)

b) $(a ; 0)$ est solution de (E)
équivaut à $2a - 0 + 1 = 0$
équivaut à $a = -\frac{1}{2}$

$\left(-\frac{1}{2} ; 0\right)$ est solution de (E)

c) $(0 ; b)$ est solution de (E) équivaut à : $2 \times 0 - b + 1 = 0$
équivaut à $\underbrace{-b} + 1 = 0$ $\quad) + b$
équivaut à $1 = b$

$(0 ; 1)$ est solution de (E).

d) $(E) : 2x - y + 1 = 0$

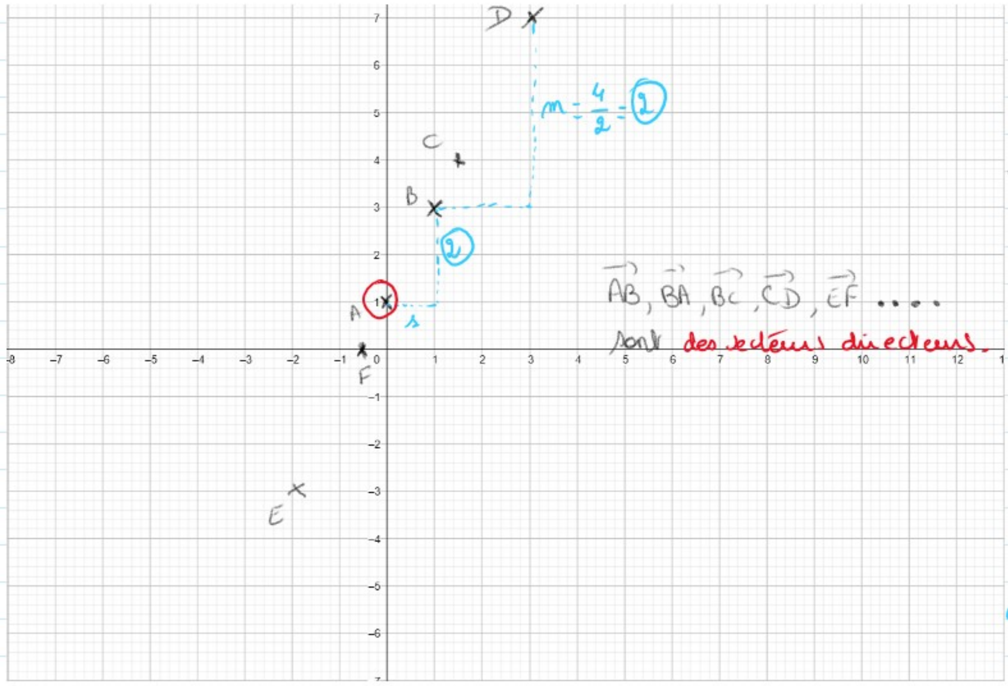
$\cancel{2 \times 0 - 0 + 1 = 1} \neq 0$

$(c ; 4)$ est solution de (E) équivaut à : $2 \times c - 4 + 1 = 2c - 3 = 0$
équivaut à $2c = 3$
équivaut à $c = \frac{3}{2}$ $\quad) \div 2$

$\left(\frac{3}{2} , 4\right)$ est solution de (E)

$(5 , +11)$ est solution de (E) car : $2 \times 5 - 11 + 1 = 0$
$(3 ; 7)$ " car : $2 \times 3 - 7 + 1 = 0$
$(6 ; +13)$ " car : $2 \times 6 - 13 + 1 = 0$

Il existe une infinité de couples car on peut choisir n'importe quel réel pour x et calculer le y ou inversement on choisit le y et on calcule le x.



les points semblent alignés.

$(E) : 2x - y + 1 = 0$
$\Leftrightarrow 2x + 1 = y$
on retrouve l'expression d'une fonction affine et on sait qu'une fonction affine a pour représentation une droite
donc les points sont bien alignés.

$y = 2x + 1$

coef. directeur — ordonnée à l'origine

Droites

1.2. Equation cartésienne d'une droite

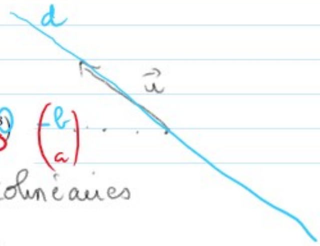
Propriété 2.

L'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $ax+by+c=0$ avec $(a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

Remarque : $(a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)$ signifie que a et b ne peuvent pas être nuls simultanément.

Propriété 3.

Réciproque : Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)$ où $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de la droite.



Exercice 1 : Déterminer une équation cartésienne de la droite d de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-3}{2}$ $\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ passant par $A(-1\ ;\ 4)$.

$M(x;y)$ appartient à d équivaut à $\vec{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y-4\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

équivaut à $\det(\vec{AM};\vec{u})=\begin{vmatrix}x+1 & -3\\ y-4 & 2\end{vmatrix}=0$ équivaut à : $(x+1)\times 2-(y-4)\times(-3)=0$

équivaut à : $2x+3y+2-12=0$

équivaut à $2x+3y-10=0$ équation de d

Exercice 2 : Déterminer une équation de la droite d passant par $A(0\ ;\ 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-1}{0}$.

$M(x;y)$ appartient à d équivaut à $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-0\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ sont colinéaires

équivaut à $\det(\vec{AM};\vec{u})=\begin{vmatrix}x & -1\\ y-1 & 0\end{vmatrix}=x\times 0-(y-1)\times(-1)=0$ équivaut à : $y-1=0$

Exercice 3 : Déterminer une équation cartésienne de la droite :

1. d_1 passant par $A(4\ ;\ -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-2}{3}$
2. d_2 passant par $B(0\ ;\ 0)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\binom{1}{5}$
3. d_3 passant par $C(0\ ;\ -1)$ et de vecteur directeur $\vec{r}\binom{1/3}{-1/2}$
4. d_4 passant par $D(1\ ;\ 1)$ et de vecteur directeur $\vec{s}\binom{0}{2}$

1) $M(x;y)$ appartient à d_1 ssi $\vec{AM}\begin{pmatrix}x-4\\y+1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires

ssi $\begin{vmatrix}x-4 & -2\\ y+1 & 3\end{vmatrix}=(x-4)\times 3-(y+1)\times(-2)=0$

ssi $3x-12+2y+2=0$ ssi $3x+2y-10=0$

2. $M(x;y)$ appartient à d_2 ssi $\vec{BM}\begin{pmatrix}x-0\\y-0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ sont colinéaires

ssi $\begin{vmatrix}x & 1\\ y & 5\end{vmatrix}=5x-y=0$ si $5x-y=0$

3. $M(x;y)$ appartient à d_3 ssi $\vec{CM}\begin{pmatrix}x-0\\y+1\end{pmatrix}$ et $\vec{r}\begin{pmatrix}1/3\\-1/2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

ssi $\begin{vmatrix}x & 1/3\\ y+1 & -1/2\end{vmatrix}=x\times\left(-\frac{1}{2}\right)-(y+1)\times\frac{1}{3}=0$ ssi $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}=0$

$\times(-6)$

ssi $+\frac{6}{2}x+\frac{6}{3}y+\frac{6}{3}=0$

ssi $3x+2y+2=0$ équations cartésiennes de d_3

d_4 : $D(1,1)$ $\vec{s}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

4) $M(x;y)$ appartient à d_4 ssi $\vec{DM}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}$ et $\vec{s}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ sont colinéaires

ssi $\begin{vmatrix}x-1 & 0\end{vmatrix}=(x-1)\times 2-0=0$ ssi $2x-2=0$

$$\begin{pmatrix} y-1 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$$

ssi $\begin{vmatrix} x-1 & \vec{\gamma}\ 0 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = (x-1)\times 2 - 0 = 0$ ssi $2x - 2 = 0$

ssi $x = 1$ éq. de d_4.

En vitrine, sont présentés des compositions obtenues à partir de deux types de meubles : un meuble A et un meuble B

La composition 1 comporte deux meubles A et deux meubles B pour un prix total de 234 euros.
La composition 2 comporte un meuble A et 3 meubles B pour un prix total de 162 euros.

Camille pense qu'un meuble B coûte 39 euros et un meuble A coûte le double car il est deux fois plus grand. A-t-elle raison ?

On note a le prix d'un meuble A et b le prix d'un meuble B, en euros.

1. Exprimer en fonction de a et b le prix de la composition 1 et de la composition 2.

2. On regroupe les deux équations en un système $\begin{cases} \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots \end{cases}$.

3. Pour déterminer a et b, on considère d'autres compositions.

   Etape 1 :
   Composition 3 : un meuble A et un meuble B

   Composition 2 : un meuble A et trois meubles B

   Etape 2 :

   Composition 3 : un meuble A et un meuble B

   Composition 4 : deux meubles B.

   Expliquer comment les compositions 3 et 4 ont été obtenues à partir des compostions 1 et 2. En déduire leur prix, puis le prix a d'un meuble A et le prix b d'un meuble B.

4. Ecrire les systèmes correspondant aux étapes 1 et 2, en expliquant, pas à pas, comment les manipulations 1 et 2 se traduisent sur les équations.

5. Résoudre le système par combinaisons linéaires: $\begin{cases} 4x+8y=10 \\ -3x-6y=6 \end{cases}$

1) composition 1 : $2a+2b=234$

composition 2 : $a+3b=162$

2) $(S)\begin{cases} 2a+2b=234 & L_1 \div 2 \\ a+3b=162. & L_2 \end{cases}$

3) composition 3.

(S) éq. à $\begin{cases} a+b=117 \\ a+3b=162. \end{cases}$ $L_2 - L_1$

composition 4.

(S) équivaut à $\begin{cases} a+b=117 \\ 2b=162-117=45 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} a=117-b=117-22{,}5=94{,}5 \\ b=\dfrac{45}{2}=22{,}5 \end{cases}$

Camille avait tort.
le meuble A coûte 94,5€ et le B coûte 22,5€

5) $\begin{cases} 4x+8y=10 \\ -3x-6y=6 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 2x+4y=5 \\ -1x-2y=2 \end{cases}$ L_1+2L_2 éq. à $\begin{cases} 2x+2\times(-x)+4y+2\times(-2y)=5+2\times 2 \\ -x-2y=2 \end{cases}$

équivaut à $\begin{cases} 0x+0y=9 \\ -x-2y=2. \end{cases}$ impossible

le système n'a pas de solution.

Systemes

Cours :

2. Systèmes

2.1. Systèmes linéaires d'équation

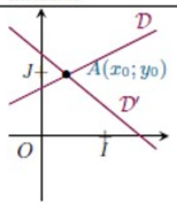
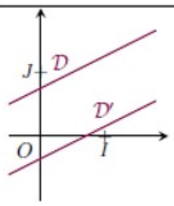
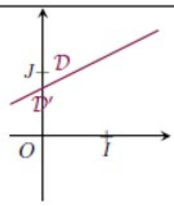
Définition 4.

Un système de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues x et y est de la forme $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b', c' sont des réels et $(x;y)$ le couple des inconnues.
Une solution de ce système est un couple $(x;y)$ qui vérifie **simultanément** les deux équations.
Résoudre ce système, c'est trouver toutes les solutions de ce système.

2.2. Nombre de couples solution et interprétation graphique

(S) $\begin{cases} a\,x + b\,y = c \\ a'\,x + b'\,y = c' \end{cases}$, où a, b, c, a', b', c' sont des réels

Voici un tableau récapitulatif des positions relatives de deux droites à partir de leur équation réduite.

Déterminant	$ab' - a'b \neq 0$	$ab' - a'b = 0$	
Interprétation	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires	
Représentation	 ①	 ②	 ③
Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un point $A(x_0;y_0)$	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.
Ensemble solution	Le système (S) a un seul couple solution : $\mathcal{S} = \{(x_0;y_0)\}$	Le système (S) n'a pas de couple solution : $\mathcal{S} = \emptyset$	Le système (S) a une infinité de couples solutions : $\left\{\left(x; -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)\right\}$

$ax + by = c$ est une éq. cartésienne de droite de v.d $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$

$a'x + b'y = c'$ est une éq. cartésienne de droite de v.d $\vec{v}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix}-b & -b'\\ a & a'\end{vmatrix}$

$= -b \times a' - (-b'a)$

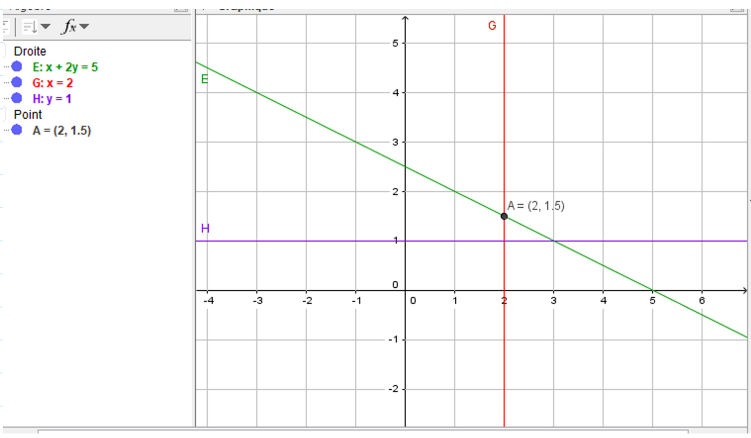
$= -ba' + b'a$

$= ab' - a'b$

Systemes

Exercice 2 : On considère les équations (F) : $x + 2y = 5$; (G) : $2x + 0y = 4$ et (H) : $0x + 2y = 2$.

- Représenter les droites associées à chacune des équations (F), (G) et (H).
- En déduire pour chaque équation le nombre et l'ensemble des solutions.



(F) : $x + 2y = 5$.

x	0	5
y	2,5	0

$0 + 2y = 5$; $5 + 2y = 5$

(G) : $2x + 0y = 4 \iff x = 2$

x	2	2
y	0	5

droite parallèle à l'axe des ordonnées

(H) $0x + 2y = 2 \iff y = 1$

droite parallèle à l'axe des abscisses

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 0y = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 + 2y = 5 \\ x = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 1,5 \\ x = 2 \end{cases}$$

$(2 ; 1,5)$ est solution du syst. formé par les éq° de (F) et de (G)