

I-5 Décomposition en facteurs premiers.

Théorème 4 - théorème fondamental de l'arithmétique : Admis

Tout entier naturel supérieur ou égale à 2 admet une décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

Exemples.

1. $12 = 2 \times 2 \times 3$ et 2 et 3 sont bien des nombres premiers.
2. $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$.
3. $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$.

Remarques. Pour que l'écriture de la décomposition soit unique la convention est d'écrire une seule fois chaque facteur premier à la puissance convenable et d'écrire les facteurs dans l'ordre croissant. On n'écrira pas $3 \times 2 \times 3$ mais 2×3^2 .

Exercice 6

1. Déterminez la décomposition en facteurs premiers de 180.
2. Déduisez-en une écriture de $\sqrt{180}$ de la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b deux éléments de \mathbb{N} , b étant le plus petit possible.
3. En déduire tous les diviseurs de 180.

_____ Correction exercice 6 _____

1. Pour cette question voici le travail à faire au brouillon.
Nous divisons autant de fois que possible par les nombres premiers en allant du plus petit au plus grand.

Étape 1 • 180 est divisible par 2 donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ \hline 90 & \end{array}$$

Étape 2 • 90 est divisible par 2 donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ \hline 90 & 2 \\ \hline 45 & \end{array}$$

Étape 3 • 45 n'est pas divisible par 2, nous essayons donc avec le nombre premier suivant 3. 45 est bien divisible par 3 puisque $4 + 5 = 9$ donc :

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ \hline 90 & 2 \\ \hline 45 & 3 \\ \hline 15 & \end{array}$$

En procédant ainsi de proche en proche nous obtenons finalement

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Ainsi : $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$.

Finalement nous écrivons uniquement

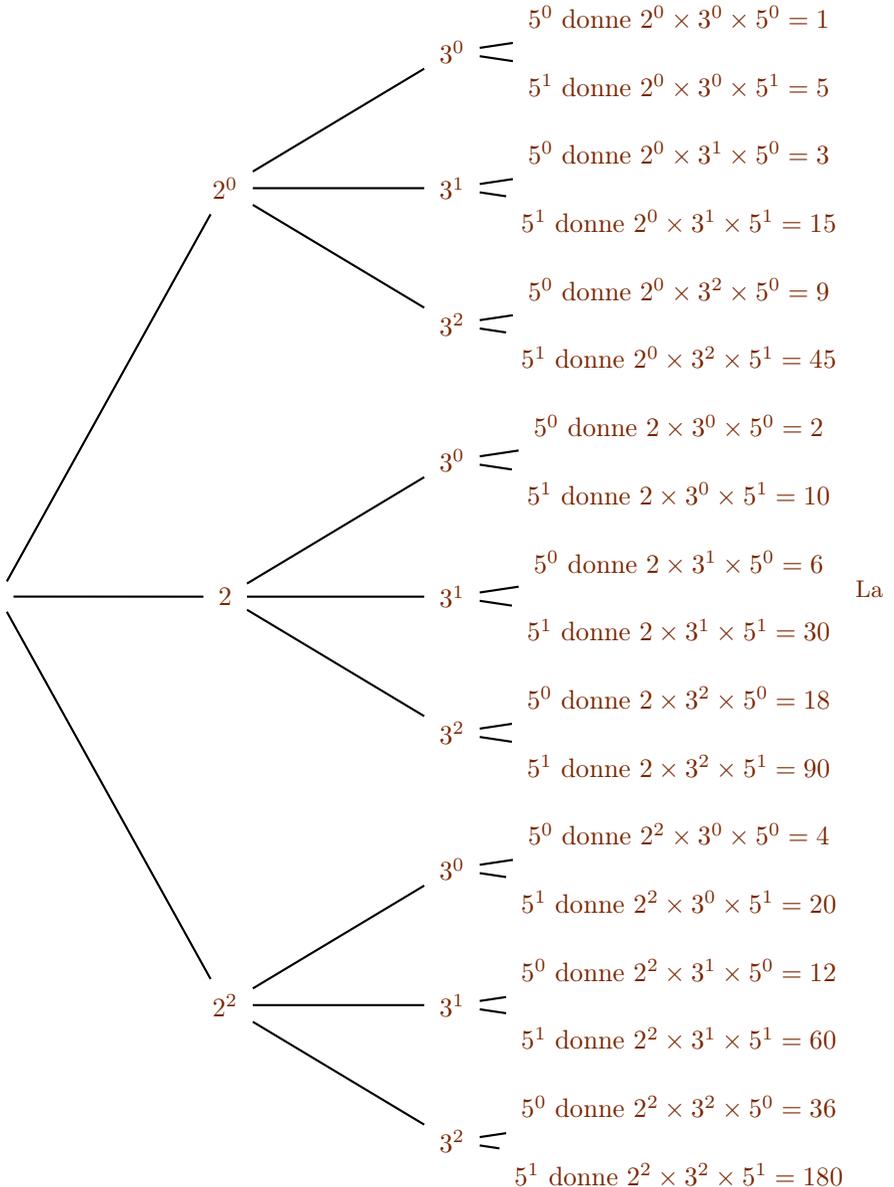
$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5.$$

2. Déterminons a et b .

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \sqrt{180} &= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5} \\ &= \sqrt{2^2} \times \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} \\ &= 2 \times 3 \times \sqrt{5} \\ &= 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\sqrt{180} = 6\sqrt{5}.$$



Fin de la correction