Inéquations

1. inéquation du premier degré

1.1. Rappels sur les fonctions affines

Définition 1.

Soit m et p deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est une fonction affine.

EXEMPLES

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{2} - 3$ est une fonction affine avec $m = \dfrac{1}{2}$ et $p = -3$.
- La fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} - 3$ n'est pas une fonction affine.

1.11 cas particuliers

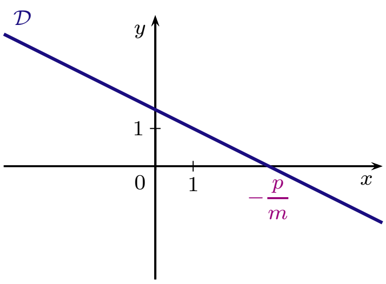
- Dans le cas où $p = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx$ est appelée fonction linéaire.
- Dans le cas où $m = 0$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = p$ est une fonction constante.

1.2. courbe représentative

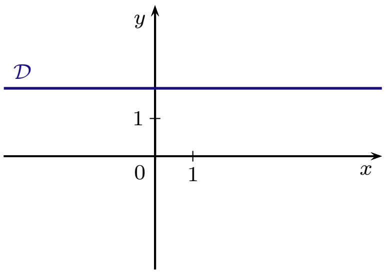
Propriété 1.

Soit m et p deux réels.
La courbe représentative de la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = mx + p$.

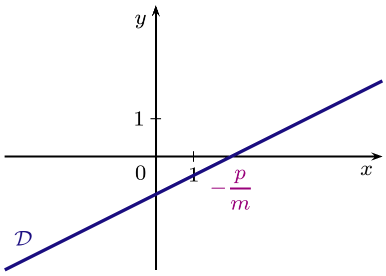
$m < 0$



$m = 0$



$m > 0$



1.3. variation

Propriété 2.

Soit m et p deux réels.

- Si m est positif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si m est négatif, la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

1.4. signe de $mx + p$ avec $m \neq 0$

Propriété 3.

Soit f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$.
$f(x)$ est du signe de m pour les valeurs de x supérieures à $-\dfrac{p}{m}$.

Preuve
Si $m \neq 0$ alors l'équation $mx + p = 0$ admet pour solution $x = -\dfrac{p}{m}$.

Si $m > 0$ alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
donc $\qquad x < -\dfrac{p}{m}$,
équivaut à $f(x) < f\left(-\dfrac{p}{m}\right)$
soit pour tout réel $x < -\dfrac{p}{m}$,
$f(x) < 0$ et réciproquement.
D'où le tableau du signe de $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $m < 0$ alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$:
donc $\qquad x < -\dfrac{p}{m}$,
équivaut à $f(x) > f\left(-\dfrac{p}{m}\right)$
soit pour tout réel $x < -\dfrac{p}{m}$,
$f(x) > 0$ et réciproquement.
D'où le tableau du signe de $f(x)$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Par conséquent, si $m \neq 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{p}{m}$		$+\infty$
$f(x) = mx + p$		signe de $-m$	0	signe de m	

Exemple

x	$-\infty$		-3.5		$+\infty$	commentaires
$2x + 7$		$-$	0	$+$		$m = 2$ positif

Exemple

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{5}$		$+\infty$	commentaires
$-5x + 3$		$+$	0	$-$		$m = -2$ négatif

2. Inéquation produit

Pour résoudre une inéquation à une inconnue on peut être amené à étudier le signe d'une expression.

2.1. étude du signe d'un produit

2.11 règle des signes d'un produit

Le produit de deux nombres de même signe est positif. Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

2.12 tableau de signes d'un produit : exemple à partir du livre page 212.

Signe de $f(x) = (-2x+1)(3x-4)$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$	commentaires
$-2x+1$		$+$	0	$-$		$-$		$m=-2$ négatif
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$m=3$ positif
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		règle des signes

2.2. Application à la résolution d'inéquation.

Résoudre $A(x) \leqslant B(x)$ équivaut à résoudre $A(x) - B(x) \leqslant 0$.

Exemple
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2$

Solution Pour tout réel x,

$$\begin{aligned}(2x+3)^2 \leqslant (3x-1)^2 &\Leftrightarrow (2x+3)^2 - (3x-1)^2 \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow [(2x+3)+(3x-1)] \times [(2x+3)-(3x-1)] \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow (2x+3+3x-1)(2x+3-3x+1) \leqslant 0\\ &\Leftrightarrow (5x+2)(4-x) \leqslant 0\end{aligned}$$

Étudions le signe du produit $(5x+2)(4-x)$ **à l'aide d'un tableau de signes.**
On étudie les signe de chacun des facteurs du produit :

$$5x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{5} \qquad \text{et} \qquad 4-x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des facteurs et, on en déduit le signe du produit en utilisant la règle des signes d'un produit :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		4		$+\infty$
$5x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(5x+2)(4-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(5x+2)(4-x) \leqslant 0$ est $S = \left]-\infty; -\frac{2}{5}\right] \cup \left[4; +\infty\right[$.

3. Inéquation quotient

3.1. Règle des signes d'un quotient

Le quotient de deux nombres de même signe est positif. Le quotient de deux nombres de signes contraires est négatif.

3.2. tableau de signes d'un quotient

Pour étudier le signe d'un quotient, on cherche les valeurs qui annulent le dénominateur (valeurs interdites) et on utilise la même méthode que pour le produit.

Signe de $\dfrac{x}{x+1}$

Solution

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$	commentaires
x		$-$		$-$	0	$+$		$m=1$ positif
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$m=1$ positif
$f(x)$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$		règle des signes

Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2$

Solution Le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel x tel que le dénominateur $3x+2 \neq 0$.
Comme $3x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{2}{3}$, le quotient $\dfrac{2x+7}{3x+2}$ est défini pour tout réel $x \neq -\dfrac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}
\frac{2x+7}{3x+2} \geqslant 2 &\Leftrightarrow \frac{2x+7}{3x+2} - 2 \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(2x+7) - 2 \times (3x+2)}{3x+2} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{2x+7-6x-4}{3x+2} \geqslant 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0
\end{aligned}$$

Étudions le signe du quotient $\dfrac{3-4x}{3x+2}$ à l'aide d'un tableau de signe.

On étudie les signes de chacun des termes du quotient :

$$3-4x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{4} \qquad \text{et} \qquad 3x+2 \leqslant 0 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{2}{3}$$

On résume dans un seul tableau le signe de chacun des termes et, on en déduit le signe du quotient en utilisant la règle des signes d'un quotient.

La double barre dans le tableau indique que $-\dfrac{2}{3}$ est une valeur interdite :

x	$-\infty$		$-\dfrac{2}{3}$		$\dfrac{3}{4}$		$+\infty$
$3-4x$		$+$		$+$	0	$-$	
$3x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{3-4x}{3x+2}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{3-4x}{3x+2} \geqslant 0$ est $S = \left]-\dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}\right]$.