Fonctions de référence

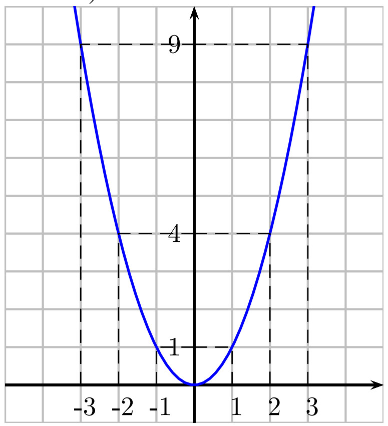
1. Fonction $x \mapsto x^2$

(a) **Rappels :** La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Variations *(démonstration exigible, faite en exercice)*

Si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$.
La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\,0[$.
Si $0 < a < b$ alors $a^2 < b^2$
La fonction est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



La courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ est une **parabole** dirigée vers le haut.

(b) **Compléments :**

Définition 1.
Une fonction f est dite **paire** si :
- pour tout réel x de son ensemble de définition D alors $(-x)$ appartient aussi à D,
- et, pour tout x de D, alors $f(x) = f(-x)$.

Conséquence : La fonction carré est **paire**, ce qui justifie que dans un repère orthogonal, l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction carré.

(c) **Application des propriétés :**

i. Sans calculatrice et sans calculer les nombres donnés, ranger ces nombres par ordre croissant :
$\left(\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(\frac{2}{15}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{1}{5}\right)^2$ puis, $\left(-\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(-\frac{1}{10}\right)^2$, $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

ii. Déterminer graphiquement le meilleur encadrement de x^2 quand $-3 \leqslant x \leqslant 2$

iii. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $x^2 = 10$ puis $(x+5)^2 = 9$.

iv. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3 \leqslant x^2 \leqslant 4$, puis vérifier graphiquement la réponse.

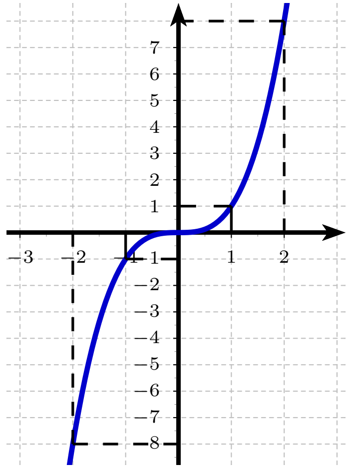
2. Fonction $x \mapsto x^3$

La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

(a) **Variations :**

Si $a < b$ alors $a^3 < b^3$
La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Réciproquement Si $a^3 < b^3$ alors $a < b$

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



(b) **Compléments :**

Définition 2.
Définition : Une fonction f est dite **impaire** si :
- pour tout réel x de son ensemble de définition D alors $(-x)$ appartient aussi à D,
- et, pour tout x de D, alors $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence : La fonction cube est **impaire**, ce qui justifie que dans le plan muni d'un repère d'origine O, O est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction cube.

Propriété 1.
Pour tout nombre réel a :
- Si $0 < a < 1$ alors : $0 < a^3 < a^2 < a < 1$.
- Si $a > 1$ alors $1 < a < a^2 < a^3$.

(c) **Application des propriétés :**

i. Sans calculatrice et sans calculer les nombres donnés, ranger ces nombres par ordre croissant : $\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$, 2^3, $\left(\frac{5}{3}\right)^3$, $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$.

ii. Calculer $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, puis déterminer l'ensemble des x tels que :
$x^3 = \frac{8}{27}$, puis $x^3 \geqslant \frac{8}{27}$ et enfin $\frac{8}{27} \leqslant x < 1$

3. Fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

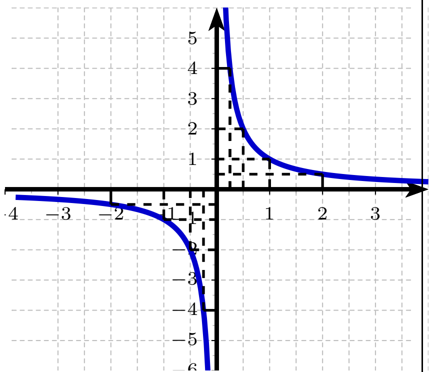
(a) **Rappels :** La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Variations *(démonstration exigible, faite en exercice)*

Pour tout nombre a et b, **non nuls** et **de même signe**

$a < b$ équivaut à $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une **hyperbole**.

(b) **Compléments :** La fonction inverse est **impaire**, et donc, dans le plan muni d'un repère d'origine O, O est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction inverse.

(c) **Application des propriétés :**

i. Sans calculatrice et sans calculer les nombres donnés, ranger ces nombres : $\dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{2}$.

ii. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $\dfrac{1}{x} = 3$.

iii. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'inéquation $\dfrac{1}{x} < 7$, puis vérifier graphiquement la réponse,

iv. Mêmes questions avec l'inéquation $3 \leqslant \dfrac{1}{x} < 7$.

(d) **Exercice :**
On considère l'algorithme ci-contre, où a est un nombre réel strictement positif.

i. Exécuter cet algorithme pas à pas avec $a = 0,1$ et compléter le tableau suivant :

x	1	2	...	..						
y	1									

Quelle est la valeur de x à la fin de l'algorithme ?

ii. Expliquer le rôle de cet algorithme.

iii. Coder cet algorithme en python et le tester avec différentes valeurs de a.

$x \leftarrow 1$;
$y \leftarrow 1$;
tant que $y > a$ **faire**
  $x \leftarrow x + 1$;
  $y \leftarrow \dfrac{1}{x}$;
fin

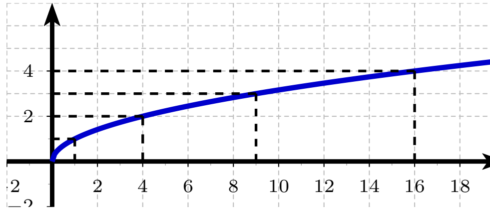
4. Fonction $x \mapsto \sqrt{x}$

La fonction racine carrée est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
L'image de 100 par la fonction racine carrée est 10 car 10 est le seul nombre positif dont le carré vaut 100.

(a) **Variations :**

$0 \leqslant a < b$ équivaut à $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0; +\infty[$



Démonstration faite en classe.

x	0	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	0	$\nearrow +\infty$

Propriété 2.

- Pour tout nombre réel positif c, l'équation $\sqrt{x} = c$ a une unique solution qui est c^2. $\mathcal{S} = \{c^2\}$.
- Pour tout nombre réel strictement positif c, l'inéquation $\sqrt{x} < c$ a pour solution l'intervalle $[0; c^2[$.

(b) **Application des propriétés :**

i. Sans calcul, ranger ces nombres par ordre croissant :$\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{1,1}$, 2, $\sqrt{1,5}$.

ii. Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation $\sqrt{x} = 4$.

iii. Résoudre dans $[0; +\infty[$ les inéquations $\sqrt{x} < 4$ et $3 \leqslant \sqrt{x} < 4$.

iv. Dire si l'implication (Si $x = 16$ alors $\sqrt{x} = 4$) est vraie ou fausse.
Énoncer sa réciproque et dire si elle est vraie ou fausse.

(c) **Exercice :**
La fréquence f du son émis par la code d'une guitare, en hertz (Hz), est donnée en fonction de la tension t de la corde en newtons (N) par la formule $f(t) = 10\sqrt{t}$.

i. Calculer la fréquence pour $t = 100$ et $t = 400$.

ii. On souhaite déterminer la tension qui permet d'obtenir la note La_2 de fréquence 220 Hz.

A. Justifier que le problème revient à résoudre l'équation $\sqrt{t} = 22$.

B. Résoudre graphiquement cette équation et conclure.

iii. De même, déterminer avec quelles tensions on obtient un son dont la fréquence est supérieure à celle du Sol_2 dont la fréquence est 198 Hz.