Fonctions de référence

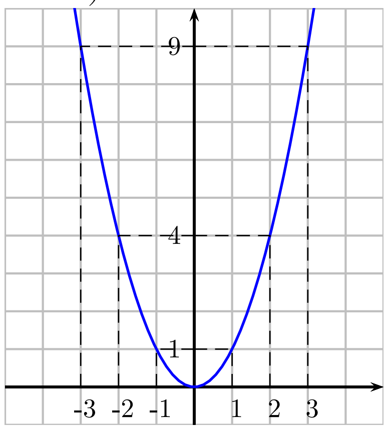
1. Fonction $x \mapsto x^2$

(a) **Rappels :** La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Variations *(démonstration exigible, faite en exercice)*

Si $a < b < 0$ alors $a^2 > b^2$.
La fonction est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;\ 0[$.
Si $0 < a < b$ alors $a^2 < b^2$
La fonction est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$



La courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ est une **parabole** dirigée vers le haut.

(b) **Compléments :**

Définition 1.
Une fonction f est dite **paire** si :
- pour tout réel x de son ensemble de définition D alors $(-x)$ appartient aussi à D,
- et, pour tout x de D, alors $f(x) = f(-x)$.

Conséquence : La fonction carré est **paire**, ce qui justifie que dans un repère orthogonal, l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe représentative de la fonction carré.

(c) **Application des propriétés :**

i. Sans calculatrice et sans calculer les nombres donnés, ranger ces nombres par ordre croissant :
$\left(\frac{1}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{15}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{3}{5}\right)^2, \left(\frac{1}{5}\right)^2$ puis, $\left(-\frac{1}{4}\right)^2, \left(-\frac{1}{10}\right)^2, \left(-\frac{2}{3}\right)^2, \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

ii. Déterminer graphiquement le meilleur encadrement de x^2 quand $-3 \leqslant x \leqslant 2$

iii. Résoudre dans $\mathbb{R}$ $x^2 = 10$ puis $(x+5)^2 = 9$.

iv. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3 \leqslant x^2 \leqslant 4$, puis vérifier graphiquement la réponse.

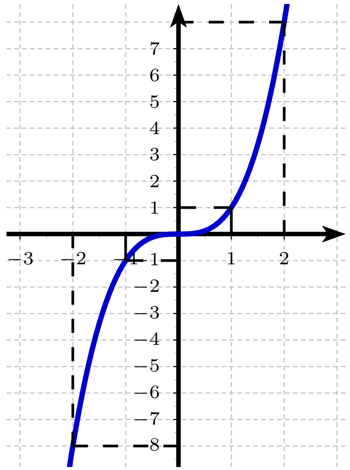
2. Fonction $x \mapsto x^3$

La fonction cube est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

(a) **Variations :**

Si $a < b$ alors $a^3 < b^3$
La fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Réciproquement Si $a^3 < b^3$ alors $a < b$

x	$-\infty$	$+\infty$
$x \mapsto x^3$	$-\infty$ ↗	$+\infty$



(b) **Compléments :**

Définition 2.
Définition : Une fonction f est dite **impaire** si :
- pour tout réel x de son ensemble de définition D alors $(-x)$ appartient aussi à D,
- et, pour tout x de D, alors $f(-x) = -f(x)$.

Conséquence : La fonction cube est **impaire**, ce qui justifie que dans le plan muni d'un repère d'origine O, O est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction cube.

Propriété 1.
Pour tout nombre réel a :
- Si $0 < a < 1$ alors : $0 < a^3 < a^2 < a < 1$.
- Si $a > 1$ alors $1 < a < a^2 < a^3$.

(c) **Application des propriétés :**

i. Sans calculatrice et sans calculer les nombres donnés, ranger ces nombres par ordre croissant : $\left(\frac{3}{4}\right)^3, \left(-\frac{3}{5}\right)^3, 2^3, \left(\frac{5}{3}\right)^3, \left(-\frac{3}{4}\right)^3$.

ii. Calculer $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, puis déterminer l'ensemble des x tels que :
$x^3 = \frac{8}{27}$, puis $x^3 \geqslant \frac{8}{27}$ et enfin $\frac{8}{27} \leqslant x < 1$

3. **Fonction** $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

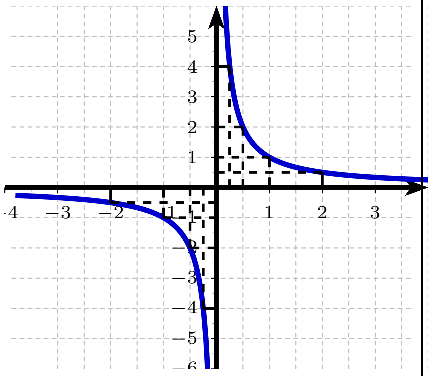
(a) **Rappels :** La fonction inverse est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Variations *(démonstration exigible, faite en exercice)*

Pour tout nombre a et b, **non nuls** et **de même signe**

$a < b$ équivaut à $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{-*}$ et sur $\mathbb{R}^{+*}$.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$0 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

La courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est une **hyperbole**.

(b) **Compléments :** La fonction inverse est **impaire**, et donc, dans le plan muni d'un repère d'origine O, O est centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction inverse.

(c) **Application des propriétés :**

i. Sans calculatrice et sans calculer les nombres donnés, ranger ces nombres : $\dfrac{1}{15}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{2}$.

ii. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'équation $\dfrac{1}{x} = 3$.

iii. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$ l'inéquation $\dfrac{1}{x} < 7$, puis vérifier graphiquement la réponse,

iv. Mêmes questions avec l'inéquation $3 \leqslant \dfrac{1}{x} < 7$.

(d) **Exercice :**

On considère l'algorithme ci-contre, où a est un nombre réel strictement positif.

i. Exécuter cet algorithme pas à pas avec $a = 0,1$ et compléter le tableau suivant :

x	1	2	...	..						
y	1									

Quelle est la valeur de x à la fin de l'algorithme ?

ii. Expliquer le rôle de cet algorithme.

iii. Coder cet algorithme en python et le tester avec différentes valeurs de a.

$x \leftarrow 1$;
$y \leftarrow 1$;
tant que $y > a$
faire
  $x \leftarrow x + 1$;
  $y \leftarrow \dfrac{1}{x}$;
fin