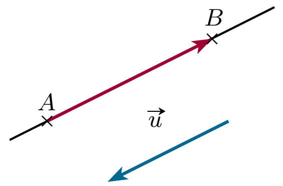
# 1. Équations cartésiennes d'une droite

## 1.1. Vecteur directeur d'une droite

**Définition 1.**

Un vecteur $\vec{u}$ non nul est un **vecteur directeur** de la droite $(AB)$ si $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.




Autrement dit, un vecteur non nul est appelé vecteur directeur d'une droite lorsqu'il a la même **direction** que cette droite.

**Remarque :** Toute droite admet une infinité de vecteurs directeurs, tous colinéaires entre eux.

**Définition 2.**

Soit $A$ un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul.
La droite $d$ de vecteur directeur $\vec{u}$ passant par $A$ est l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

**Propriété 1.**

Deux droites sont parallèles si, et seulement si, un vecteur directeur de l'une est colinéaire à un vecteur directeur de l'autre.

**Exemple :** Soit $A(1\ ;\ 2)$, $B(5\ ;\ 4)$ et $C(-1\ ;\ 6)$.
La droite $(AB)$ est-elle parallèle à $d$, la droite passant par $C$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-2}{-1}$ ?

## 1.2. Equation cartésienne d'une droite

**Propriété 2.**

L'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ du plan tels que $ax+by+c=0$ avec $(a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

**Remarque :** $(a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)$ signifie que $a$ et $b$ ne peuvent pas être nuls simultanément.

**Preuve** Appelons $D$ cet ensemble de points.

- Montrons d'abord que $D$ n'est pas vide c'est-à-dire qu'il contient bien au moins un point. Pour cela, on procède par disjonction des cas.
  - Supposons d'abord que $a\neq 0$.
    On considère alors le point $A\left(-\dfrac{c}{a}\ ;\ 0\right)$ et on a :
    $ax_A+by_A+c=a\times\left(-\dfrac{c}{a}\right)+b\times 0+c=-c+c=0$ donc $A$ appartient à l'ensemble $D$.
  - Supposons maintenant que $a=0$.
    On a alors $b\neq 0$ (puisque $(a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)$) et on montre de même que le point $A\left(0\ ;\ -\dfrac{c}{b}\right)$ appartient à $D$.

  Dans les deux cas, il existe un point $A(x_A\ ;\ y_A)$ qui appartient à $D$, c'est-à-dire tel que

  $ax_A+by_A+c=0$.

- Soit $M(x\ ;\ y)\in D$, on a alors $ax+by+c=0$.

  Des égalités $ax_A+by_A+c=0$ et $ax+by+c=0$, on déduit par soustraction que :

  $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$.

  Comme $\overrightarrow{AM}\binom{x-x_A}{y-y_A}$, en posant $\vec{u}\binom{-b}{a}$, on obtient :

  $M\in D\Leftrightarrow \text{dét}\left(\overrightarrow{AM}\ ,\ \vec{u}\right)=\begin{vmatrix}(x-x_A) & -b\\(y-y_A) & a\end{vmatrix}=0$ ce qui équivaut à :

  $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires, autrement dit $M$ appartient à la droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ passant par $A$.

**Propriété 3.**

**Réciproque :** Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $(a\ ;\ b)\neq(0\ ;\ 0)$ où $\vec{u}\binom{-b}{a}$ est un vecteur directeur de la droite.

**Preuve** On considère une droite $d$ du plan, $A(x_A\ ;\ y_A)$ un point de $d$ et $\vec{u}\binom{p}{q}$ un vecteur directeur de $d$. Un point $M(x\ ;\ y)$ appartient à la droite $d$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}\binom{x-x_A}{y-y_A}$ et $\vec{u}\binom{p}{q}$ sont colinéaires.

Cela revient à dét $\left(\overrightarrow{AM}\ ,\ \vec{u}\right)=\begin{vmatrix}(x-x_A) & p\\(y-y_A) & q\end{vmatrix}=(x-x_A)\times q-p\times(y-y_A)=0$ soit $qx-py-qx_A+py_A=0$. On a donc bien une équation de la forme $ax+by+c=0$ avec $a=q$, $b=-p$ et $c=-qx_A+py_A$ où $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

**Définition 3.**

Une équation d'une droite $d$ de la forme $ax+by+c=0$ est appelée une **équation cartésienne**de la droite $d$.

**Remarque :** Une droite admet plusieurs équations cartésiennes mais au plus une seule équation de la forme $y=ax+b$, appelée **équation réduite** de la droite.

## 1.3. Lien avec l'équation réduite

- Si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées (c-à-d **verticale**) , elle a une équation du type $x = c$.
  $\vec{u}\binom{0}{1}$ est un vecteur directeur.

- Sinon, l'équation réduite de la droite est de la forme $y=mx+p$ et $\vec{u}\binom{1}{m}$ est un vecteur directeur.

## 2. Systèmes

### 2.1. Systèmes linéaires d'équation

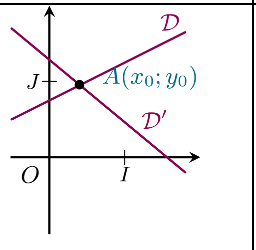
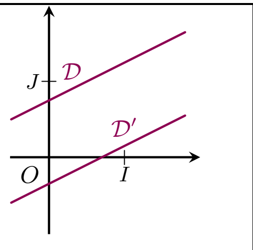
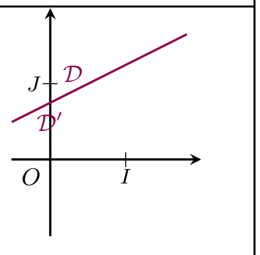
**Définition 4.**

Un système de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues $x$ et $y$ est de la forme $\begin{cases} a\ x\ + b\ y\ = c \\ a'\ x + b'\ y\ = c' \end{cases}$ , où $a$, $b$, $c$ ,$a'$, $b'$, $c'$ sont des réels et $(x; y)$ le couple des inconnues.
Une solution de ce système est un couple $(x; y)$ qui vérifie **simultanément** les deux équations.
**Résoudre** ce système, c'est trouver toutes les solutions de ce système.

### 2.2. Nombre de couples solution et interprétation graphique

**(S)** $\begin{cases} a\ x\ + b\ y\ = c \\ a'\ x + b'\ y\ = c' \end{cases}$ , où $a$, $b$, $c$ ,$a'$, $b'$, $c'$ sont des réels

Voici un tableau récapitulatif des positions relatives de deux droites à partir de leur équation réduite.

| Déterminant | $ab' - a'b \neq 0$ | $ab' - a'b = 0$ | |
|---|---|---|---|
| Interprétation | $\vec{u} et \vec{v}$ ne sont pas colinéaires | $\vec{u} et \vec{v}$ sont colinéaires | |
| Représentation |  1 |  2 |  3 |
| Positions relatives de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ | $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes en un point $A(x_0; y_0)$ | $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles | $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues. |
| Ensemble solution | Le système $(S)$ a un seul couple solution : $\mathcal{S} = \{(x_0; y_0)\}$ | Le système $(S)$ n'a pas de couple solution : $\mathcal{S} = \emptyset$ | Le système $(S)$ a une infinité de couples solutions : $\left\{\left(x; -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}\right)\right\}$ |

**Exercice 1 :** On considère l'équation (E) : $3x - 2y = 4$.

- Parmi les couples suivants, indiquer ceux qui sont solutions de l'équation (E) ? $(1; 1)$ ; $(0; 2)$ ; $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$ ; $(1,5; 0,25)$.
- Un repère étant fixé. Montrer que l'équation (E) est celle d'une droite (d). En déduire le nombre de solutions de l'équation (E). Comment les caractériser ?

**Exercice 2 :** On considère les équations (F) : $x + 2y = 5$ ; (G) : $2x + 0y = 4$ et (H) : $0x + 2y = 2$.

- Représenter les droites associées à chacune des équations (F), (G) et (H).
- En déduire pour chaque équation le nombre et l'ensemble des solutions.

**Exercice 3 :** On considère le système suivant : $\begin{cases} 3\ x\ - 2\ y\ = 4 \\ 2\ x\ \ + y\ = 5 \end{cases}$

En interprétant graphiquement chacune des équations, justifier que le système admet une unique solution. Que représente cette solution ? Préciser la solution.

**Exercice 4 :** Résoudre les systèmes.

1. $\begin{cases} 5\ x + 2\ y\ = 2 \\ 15\ x + 6\ y\ = 4 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 6\ x + 2\ y\ = 9 \\ 2\ x\ - y\ = -3 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3\ x - 6\ y\ = 18 \\ x - 2\ y\ = 6 \end{cases}$