Propriété 8.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

C'est pourquoi la base $(\vec{i}, \vec{j})$ suffit donc pour donner les coordonnées d'un vecteur.

Propriété 9.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et et tous réels k et k', on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

Ces propriétés se montrent facilement avec les coordonnées et résultent des propriétés sur les nombres réels.

Définition 4.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

Propriété 10.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Dire que $xy' - x'y = 0$ équivaut à dire que

$$\left\{\begin{array}{c} \text{il existe un réel k tel que } \vec{v} = k\vec{u} \\ OU \\ \vec{u} = \vec{0} \end{array}\right.$$

Définition 5.

La différence des produits $x.y' - x'.y$ est appelée déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note dét $(\vec{u} , \vec{v})$. Il faut savoir que :
dét $(\vec{u} , \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Propriété 11.

Conséquence : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement leur déterminant est nul.

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, il suffit de :

possibilité 1 trouver un réel k non nul tel que $x' = kx$ et $y' = ky$;

possibilité 2 vérifier que le déterminant , $xy' - x'y$ est nul.

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?
$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$.

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

$\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$. $-6 = -3 \times 2$ et $-18 = -3 \times 6$ donc $\vec{v} = -3\vec{u}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

ou

dét $(\vec{u}\ ,\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 6 & -18 \end{vmatrix} = 2 \times (-18) - 6 \times (-6) = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?
$\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?
$\vec{w}\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z}\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$.
dét $(\vec{w}\ ,\ \vec{z}) = \left|\begin{smallmatrix} -5 & 12 \\ 3 & -7 \end{smallmatrix}\right| = -5 \times (-7) - 3 \times 12 = 35 - 36 \neq 0$.
Donc $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

Propriété 12.

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.