Compléments sur les vecteurs

Coordonnées et colinéarité

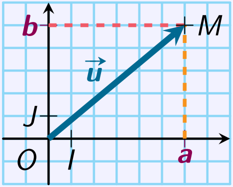
MMouton

8 mai 2020

Coordonnées d'un vecteur

Définition 1.

Dans un repère $(O; I, J)$, on considère la translation de vecteur $\vec{u}$ qui translate l'origine O en un point M de coordonnées $(a; b)$.
Dans la base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, les coordonnées du vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}$ sont les coordonnées du point M. On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et on note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



Coordonnées d'un vecteur

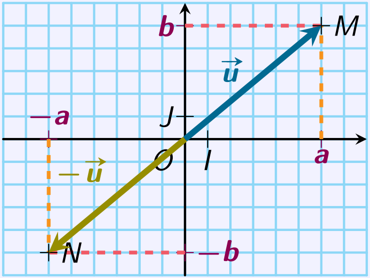
Propriété 1.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

Coordonnées du vecteur opposé

Propriété 2.

Si le vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}$ a pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors le vecteur opposé a pour coordonnées $\vec{u}\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ dans la même base.



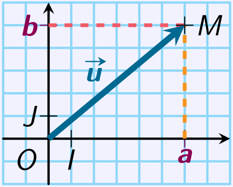
Norme d'un vecteur

Propriété 3.

Si les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}\,;\vec{j})$ alors la norme du vecteur $\vec{u}$ vaut

$$\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

.



Coordonnées d'un vecteur

Propriété 4.

Dans un repère $(O; I, J)$, si le point A a pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}).$$

.

On retrouve la propriété :
Dans le plan muni d'un repère **orthonormé**, si on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées des points A et B, la distance entre deux points A et B est donnée par la formule suivante :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Coordonnées du vecteur somme

Propriété 5.

Somme de deux vecteurs : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

alors les coordonnées du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

dans la même base.

Coordonnées du vecteur différence

Définition 2.

Soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

Propriété 6.

Différence de deux vecteurs : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$,

alors les coordonnées du vecteur différence $\vec{u} - \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$.

dans la même base.

methode Repérer un point défini par une somme vectorielle
Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on place les points $A(2;3)$, $B(4;-1)$, $C(5;3)$ et $D(-2;-1)$. Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$?

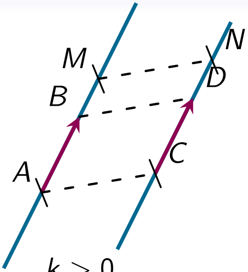
methode Repérer un point défini par une somme vectorielle
Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on place les points $A(2;3)$, $B(4;-1)$, $C(5;3)$ et $D(-2;-1)$. Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$? **Réponse :** On cherche les coordonnées $(x_E; y_E)$ du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
Donc le couple $(x_E; y_E)$ est solution du système :

$$\begin{cases} x_E - x_A = (x_D - x_A) + (x_B - x_C) \\ y_E - y_A = (y_D - y_A) + (y_B - y_C) \end{cases} \text{soit}$$

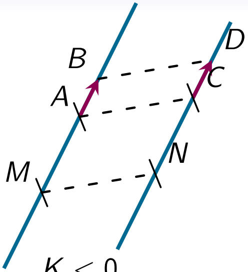
$$\begin{cases} x_E - 2 = (-2-2) + (4-5) \\ y_E - 3 = (-1-3) + (-1-3) \end{cases} \text{soit} \begin{cases} x_E - 2 = -5 \\ y_E - 3 = -8 \end{cases} \text{soit}$$

$$\begin{cases} x_E = -5 + 2 = -3 \\ y_E = -8 + 3 = -5 \end{cases}$$

Les coordonnées du point E sont $(-3;-5)$.



Sur la figure, $k = 1,5$



Sur la figure, $k = -2$

Définition 3.

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un réel.

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$:soient A et B deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, alors le vecteur $k\vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$ où M est le point d'abscisse k de la droite (AB) munie du repère $(A; \overrightarrow{AB})$.
- Si $\vec{u} = \vec{0}$: on définit $k\vec{u} = \vec{0}$.

Remarque

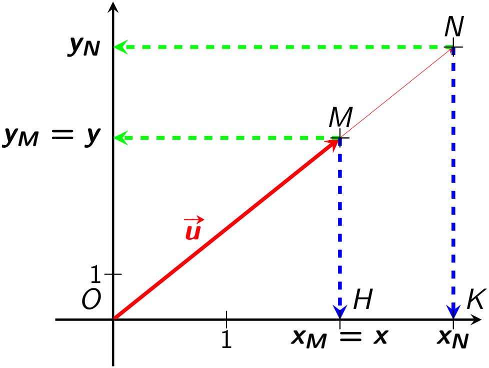
$\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de k. $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$. avec $|k|$ correspondant à la valeur absolue de k (k si $k > 0$ et $-k$ si $k < 0$)

Propriété 7.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère du plan et k un réel .

On admet que le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans ce même repère .

Illustration quand $k > 0$ et $x > 0$ et $y > 0$.



Remarque

N est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.