Propriété 12.

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires ;
- Trois points A, B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple d'utilisation :

Soit $A(-2;1)$, $B(3;5)$, $C(6;8)$ et $D(-4;0)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exemple d'utilisation :
Soit $A(-2;1)$, $B(3;5)$, $C(6;8)$ et $D(-4;0)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Réponse :
Comme le quadrilatère pourrait être un parallélogramme, on commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ puis le déterminant.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et,

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-4) \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Exemple d'utilisation :
Soit $A(-2;1)$, $B(3;5)$, $C(6;8)$ et $D(-4;0)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ? Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Réponse :
Comme le quadrilatère pourrait être un parallélogramme, on commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ puis le déterminant.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et,

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-4) \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}$.

dét $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{DC}) = 5 \times 8 - 4 \times 10 = -40 - (-40) = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont donc colinéaires. On peut en conclure que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Comme $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, le quadrilatère $ABCD$ n'est pas un parallélogramme mais il a deux cotés parallèles, c'est donc un trapèze.

Exemple d'utilisation :

$A(-2;1)$, $B(3;5)$ et $C(6;7,4)$ sont-ils alignés ?

Exemple d'utilisation :
$A(-2;1)$, $B(3;5)$ et $C(6;7,4)$ sont-ils alignés ?
Réponse : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le déterminant.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-(-2)\\ 5-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\ 4\end{pmatrix} \text{ et,}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C - x_A\\ y_C - y_A\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6-(-2)\\ 7,4-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\ 6,4\end{pmatrix}$$

Exemple d'utilisation :
$A(-2;1)$, $B(3;5)$ et $C(6;7,4)$ sont-ils alignés ?
Réponse : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le déterminant.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-2) \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et,}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-(-2) \\ 7,4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6,4 \end{pmatrix}$$

dét $(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix} = 5 \times 6,4 - 8 \times 4 = 32 - 32 = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc colinéaires.
Les droites (AB) et (AC) sont parallèles, avec le point A en commun, on peut donc en conclure que les points A, B et C sont alignés.

Exemple d'utilisation :

$A(1;2)$; $B(3;1)$ et $C(5;3)$ sont-ils alignés ?

Exemple d'utilisation :
$A(1;2)$; $B(3;1)$ et $C(5;3)$ sont-ils alignés ?
Réponse : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le déterminant.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et,}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple d'utilisation :
$A(1;2)$; $B(3;1)$ et $C(5;3)$ sont-ils alignés ?
Réponse : On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le déterminant.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et,}$$

$$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dét $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 2 \times 1 - (-1) \times 4 = 2 - (-4) = 6 \neq 0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont donc pas colinéaires.
Donc A, B, C ne sont pas alignés.