

Compléments sur les vecteurs : coordonnées et colinéarité.

1. Coordonnées

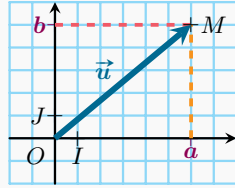
1.1. Coordonnées d'un vecteur

Définition 1.

Dans un repère $(O; I, J)$, on considère la translation de vecteur \vec{u} qui translate l'origine O en un point M de coordonnées $(a; b)$.

Dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$, les coordonnées du vecteur \vec{u} sont les coordonnées du point M . On a $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

et on note $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.



Propriété 1.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées.

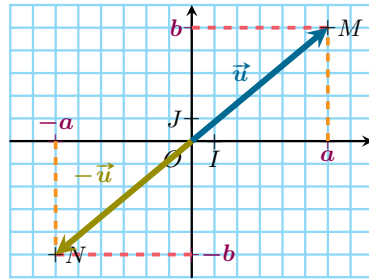
Propriété 2.

Si les coordonnées du vecteur \vec{u} sont $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$ alors la norme du vecteur \vec{u} vaut

$$\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Propriété 3.

Si le vecteur \vec{u} a pour coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors le vecteur opposé a pour coordonnées $\vec{u} \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ dans la même base.



Propriété 4.

Dans un repère $(O; I, J)$, si le point A a pour coordonnées $(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ alors les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} sont

$$\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ dans la base } (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ}).$$

preuve Soit A, B et M de coordonnées respectives $(x_A; y_A)$, $(x_B; y_B)$ et $(x_M; y_M)$ dans un repère $(O; I, J)$ tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$ et $OMBA$ est un parallélogramme.

Donc $[AM]$ et $[OB]$ ont même milieu.

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_M}{2} = \frac{x_B + x_O}{2} \\ \frac{y_A + y_M}{2} = \frac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_A + x_M = x_B \\ y_A + y_M = y_B \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_M = x_B - x_A \\ y_M = y_B - y_A \end{cases}$$

On retrouve la propriété :

Dans le plan muni d'un repère **orthonormé**, si on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées des points A et B , la distance entre deux points A et B est donnée par la formule suivante :

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

1.2. Coordonnées du vecteur somme

Propriété 5.

Somme de deux vecteurs : Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors les coordonnées du vecteur somme $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ dans la même base.

Conséquence : Coordonnées du vecteur différence

Définition 2.

Soustraire un vecteur, c'est additionner son opposé.

Propriété 6.

Différence de deux vecteurs : Si \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs de coordonnées respectives $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors les coordonnées du vecteur différence $\vec{u} - \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x - x' \\ y - y' \end{pmatrix}$ dans la même base.

methode Repérer un point défini par une somme vectorielle

Dans un repère orthogonal $(O; I, J)$, on place les points $A(2; 3)$, $B(4; -1)$, $C(5; 3)$ et $D(-2; -1)$. Quelles sont les coordonnées du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$?

On cherche les coordonnées $(x_E; y_E)$ du point E tel que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Donc le couple $(x_E; y_E)$ est solution du système :

$$\begin{cases} x_E - x_A = (x_D - x_A) + (x_B - x_C) \\ y_E - y_A = (y_D - y_A) + (y_B - y_C) \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_E - 2 = (-2 - 2) + (4 - 5) \\ y_E - 3 = (-1 - 3) + (-1 - 3) \end{cases} \text{ soit}$$

$$\begin{cases} x_E - 2 = -5 \\ y_E - 3 = -8 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x_E = -5 + 2 = -3 \\ y_E = -8 + 3 = -5 \end{cases}$$

Les coordonnées du point E sont $(-3; -5)$.