Compléments sur les vecteurs

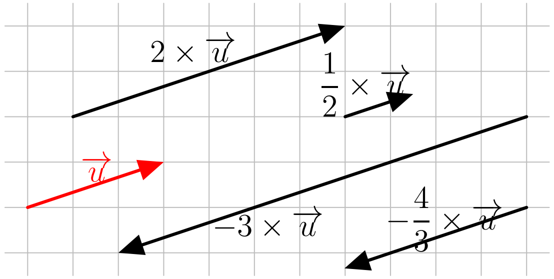
1. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel k

1.1. Définition générale

Définition 1.

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul et k un réel non nul, on définit le vecteur $\vec{v} = k\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ par :

- A, B et C sont alignés,
- si $k > 0$, $AC = kAB$ et B et C sont du même côté par rapport à A,
- Si $k < 0$, $AC = -kAB$ et B et C sont de part et d'autre de A.



Remarque 1 Si $\vec{u} = 0$ ou $k = 0$ alors $\vec{v} = \vec{0}$

Remarque 2 $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction. Leurs sens et leurs longueurs dépendent de k. $||k\vec{u}|| = |k| \times ||\vec{u}||$. avec $|k|$ correspondant à la valeur absolue de k (k si $k > 0$ et $-k$ si $k < 0$)

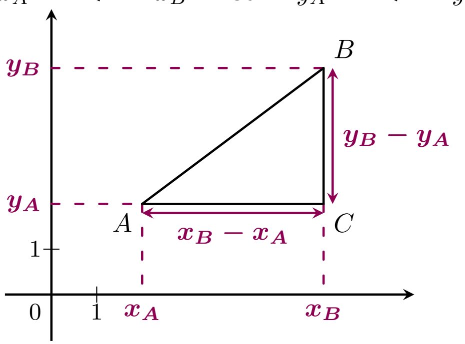
Norme d'un vecteur

Propriété 1.

Dans le plan muni d'un repère **orthonormé**, on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées des points A et B. La distance entre deux points A et B est donnée par la formule suivante :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Illustration dans le cas où $x_A < x_B$ **et** $y_A < y_B$



Propriété 2.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère du plan.

Le vecteur $\vec{u}$ a pour norme : $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

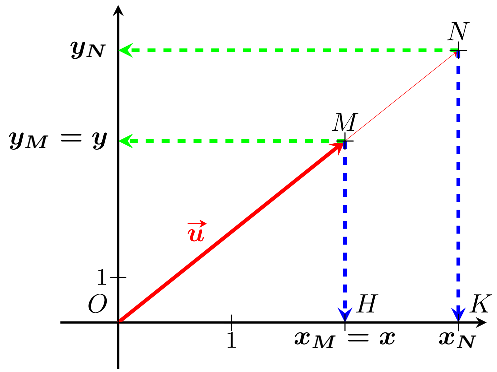
1.2. Coordonnées de vecteurs

Propriété 3.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère du plan et k un réel .

On admet que le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ dans ce même repère .

Illustration quand $k > 0$ **et** $x > 0$ **et** $y > 0$**.**



On suppose $\vec{u} \neq \vec{0}$.

On appelle :

M le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et,

N le point tel que $k\vec{u} = \overrightarrow{ON}$.

Alors : $\frac{ON}{OM} = k$.(Attention, c'est un quotient de distances et NON de vecteurs !)

k est supposé positif dans cette démonstration. Comme les coordonnées s'obtiennent grâce aux parallèles aux axes, on peut appliquer **le théorème de Thalès** et on obtient :

$$\frac{x_N}{x_M} = \frac{OK}{OH} = \frac{ON}{OM} = k.$$

D'où $x_N = kx_M = kx$.

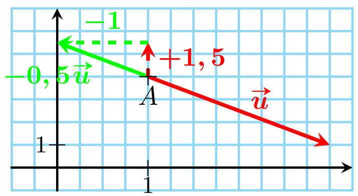
De même, $y_N = ky_M = ky$

Remarque 1. *N est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport k.*

Exemple : Dans un repère orthogonal, construire le représentant d'origine $A(1; 4)$ du vecteur $-0,5\vec{u}$ avec $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

$\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donc $-0,5\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -0,5 \times 2 \\ -0,5 \times (-3) \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \end{pmatrix}$.



Propriété 4.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$, alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Preuve : Soit $\vec{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans un repère du plan $(0; \vec{i}, \vec{j})$.
Comme $\vec{i}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans ce même repère et $\vec{j}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le vecteur $x\vec{i} + y\vec{j}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Or, deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même coordonnées donc $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. La base $(\vec{i}, \vec{j})$ suffit donc pour donner les coordonnées d'un vecteur.

1.3. Règles opératoires

Propriété 5.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et et tous réels k et k', on a :

- $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$.
- $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$.
- $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$.

Ces propriétés se montrent facilement avec les coordonnées et résultent des propriétés sur les nombres réels.

1.4. Application : Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 6.

Dans le plan muni d'un repère, on note $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ les coordonnées de A et B.
Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont données par la formule suivante :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

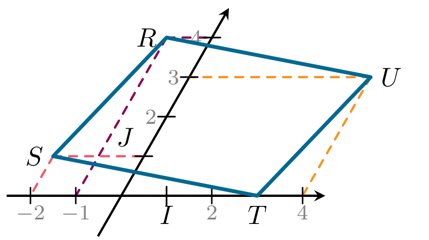
Cette propriété est valable dans n'importe quel type de repère.

Exercice 1.
Dans un repère $(O; I, J)$, on donne les points de coordonnées suivants :
$R(-1; 4)$; $S(-2; 1)$; $T(3; 0)$ et $U(4; 3)$.

1. Placer les points dans le repère $(O; I, J)$.
2. Calculer les coordonnées du milieu du segment $[RT]$ puis du segment $[SU]$. Conclure.

Correction

1.



2. $\dfrac{x_R + x_T}{2} = \dfrac{-1 + 3}{2} = 1$ et
$\dfrac{y_R + y_T}{2} = \dfrac{4 + 0}{2} = 2$.
Donc les coordonnées du milieu du segment $[RT]$ sont $(1; 2)$.
$\dfrac{x_S + x_U}{2} = \dfrac{-2 + 4}{2} = 1$ et
$\dfrac{y_S + y_U}{2} = \dfrac{1 + 3}{2} = 2$.
Donc les coordonnées du milieu du segment $[SU]$ sont $(1; 2)$.
Les coordonnées des deux milieux sont les mêmes donc il s'agit du même point.
Le quadrilatère $RSTU$ a ses diagonales $[RT]$ et $[SU]$ qui se coupent en leur milieu.
Donc $RSTU$ est un parallélogramme.