

1. Colinéarité

1.1. Définition

Définition 1.

On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque 1. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

1.2. Notion de déterminant

Propriété 1.

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs.

Dire que $xy' - x'y = 0$ équivaut à dire que $\begin{cases} \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \vec{v} = k\vec{u} \\ \text{OU} \\ \vec{u} = \vec{0} \end{cases}$

Démonstration :

Partie 1 : On montre que s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ ou que si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $xy' - x'y = 0$.

- Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $0 \times y' - x' \times 0 = 0$.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Dans ce cas : $\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases}$
 $xy' - x'y = xky - kxy = kxy - kxy = 0$.

Partie 2 : La réciproque. Si $xy' - x'y = 0$, alors soit $\vec{u}$ est nul (correspond à une des possibilités), soit il ne l'est pas et alors l'une au moins de ses coordonnées est non nulle. Supposons $x \neq 0$, alors on pose $k = \frac{x'}{x}$. Comme $xy' - x'y = 0$, on a : $xy' = x'y$ ou $y' = \frac{x'}{x} \times y$ et donc $y' = ky$.

Finalement, $\vec{v} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. D'où, $\vec{v} = k\vec{u}$.

Supposons $x = 0$, alors y est non nul et alors on pose $k = \frac{y'}{y}$. Comme $xy' - x'y = 0$, on

a : $xy' = x'y$ ou $x \times \frac{y'}{y} = x'$ et donc $x \times k = x'$.

Finalement, $\vec{v} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$. D'où, $\vec{v} = k\vec{u}$

Définition 2.

La différence des produits $x.y' - x'.y$ est appelée déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $\det(\vec{u}, \vec{v})$. Il faut savoir que : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Propriété 2.

Conséquence : Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement leur déterminant est nul.

Pour vérifier que deux vecteurs non nuls $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, il suffit de :

possibilité 1 trouver un réel k non nul tel que $x' = kx$ et $y' = ky$;

possibilité 2 vérifier que le déterminant, $xy' - x'y$ est nul.

Soit $(O; I, J)$ un repère orthogonal. Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

- $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ -18 \end{pmatrix}$.
- $\vec{w} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{z} \begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Réponses :

- $-6 = -3 \times 2$ et $-18 = -3 \times 6$ donc $\vec{v} = -3\vec{u}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

ou

$\det(\vec{u}, \vec{v}) = 2 \times (-18) - 6 \times (-6) = 0$, donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

- $\det(\vec{w}, \vec{z}) = -5 \times (-7) - 3 \times 12 = 35 - 36 \neq 0$. Donc $\vec{w}$ et $\vec{z}$ ne sont pas colinéaires.

2. Application

Propriété 3.

- Deux droites (AB) et (CD) sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires;
- Trois points A , B et C sont **alignés** si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemples d'utilisation :

1. Soit $A(-2; 1)$, $B(3; 5)$, $C(6; 8)$ et $D(-4; 0)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles? Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?
2. $A(-2; 1)$, $B(3; 5)$ et $C(6; 7, 4)$ sont-ils alignés?
3. $A(1; 2)$; $B(3; 1)$ et $C(5; 3)$ sont-ils alignés?

Réponses :

1. Comme le quadrilatère pourrait être un parallélogramme, on commence par calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ puis le déterminant.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et, } \overrightarrow{DC} \begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - (-4) \\ 8 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 5 \times 8 - 4 \times 10 = -40 - (-40) = 0.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont donc colinéaires. On peut en conclure que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Comme $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{DC}$, le quadrilatère $ABCD$ n'est pas un parallélogramme mais il a deux cotés parallèles, c'est donc un trapèze.

2. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le déterminant.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - (-2) \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et, } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - (-2) \\ 7, 4 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6, 4 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 5 \times 6, 4 - 8 \times 4 = 32 - 32 = 0. \text{ Les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont donc colinéaires.}$$

Les droites (AB) et (AC) sont parallèles, avec le point A en commun, on peut donc en conclure que les points A, B et C sont alignés.

3. On calcule les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ puis le déterminant.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et, } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \times 1 - (-1) \times 4 = 2 - (-4) = 6 \neq 0. \text{ Les vecteurs } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ ne sont donc pas colinéaires.}$$

Donc A, B, C ne sont pas alignés.