Exercice 13 page 160

Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

- $n(x) = \sqrt{3}x^2 - \pi x + \frac{1}{3}$
- $p(x) = (2x^2 - x + 1)(-7x + 8)$
- $r(x) = \frac{3x-7}{x}$
- $s(x) = \frac{x+5}{2x-1}$
- $t(x) = \frac{x^2+3x-7}{x+5}$
- $w(x) = \frac{5\sqrt{x}}{7-3x}$

1) ens. de déf de n : $\mathbb{R}$
ens. de dérivabilité de n : $\mathbb{R}$
car n est un polynôme.

$n'(x) = 2\sqrt{3}x - \pi \times 1 + 0 = 2\sqrt{3}x - \pi$.

2) p est déf. et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$(uv)' = u'v + uv'$

$\begin{cases} u(x) = 2x^2 - x + 1 \\ v(x) = -7x + 8 \end{cases}$

$u'(x) = 2 \times 2x - 1 + 0 = 4x - 1$

$v'(x) = -7$

$p'(x) = (4x-1) \times (-7x+8) + (2x^2 - x + 1) \times (-7)$

$p'(x) = -28x^2 + 32x + 7x - 8 - 14x^2 + 7x - 7$

$p'(x) = -42x^2 + 46x - 15$

3) r est déf. et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\begin{cases} u(x) = 3x - 7 \\ v(x) = x \end{cases}$

$u'(x) = 3$

$v'(x) = 1$

$r'(x) = \frac{3 \times x - (3x-7) \times 1}{x^2} = \frac{3x - 3x + 7}{x^2} = \frac{7}{x^2}$

4) s est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

$s(x) = \frac{x+5}{2x-1}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\begin{cases} u(x) = x + 5 \\ v(x) = 2x - 1 \end{cases}$

$u'(x) = 1$

$v'(x) = 2$

$s'(x) = \frac{1 \times (2x-1) - (x+5) \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x - 1 - 2x - 10}{(2x-1)^2} = \frac{-11}{(2x-1)^2}$

5) $t(x) = \frac{x^2+3x-7}{x+5}$

t est définie et dérivable sur : $]-\infty ; -5[\cup]-5 ; +\infty[$

$x + 5 \neq 0$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$\begin{cases} u(x) = x^2 + 3x - 7 \\ v(x) = x + 5 \end{cases}$

$u'(x) = 2x + 3$

$v'(x) = 1$

$(2x+3) \times (x+5) - (x^2+3x-7) \times 1$

$v(x) = x+5 \qquad v'(x) = 1$

$$t'(x) = \frac{(2x+3)\times(x+5) - (x^2+3x-7)\times 1}{(x+5)^2} = \frac{2x^2+10x+3x+15-x^2-3x+7}{(x+5)^2}$$

$$t'(x) = \frac{x^2+10x+22}{(x+5)^2}$$

6) $w(x) = \frac{5\sqrt{x}}{7-3x}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^+$

VI $7-3x=0 \iff 7=3x \iff \frac{7}{3}=x$.

$-\infty$ ... 0 ... $\frac{7}{3}$ ... $+\infty$

ens. de déf de w : $[0 ; \frac{7}{3}[\cup]\frac{7}{3} ; +\infty[$

⚠ $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0

déf° du nb. dérivé : $\frac{w(a+h)-w(a)}{h}$ avec $a=0$.

Dérivabilité en 0 :

$$\frac{w(h)-w(0)}{h} = \frac{\frac{5\sqrt{h}}{7-3h} - 0}{h} = \frac{1}{h} \times \frac{5\sqrt{h}}{7-3h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \times \cancel{\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}}} \times \frac{5}{7-3h}$$

$$= \frac{1\times 5}{\sqrt{h}\times(7-3h)}$$

$\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{h}\times(7-3h) = 0$ donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{w(h)-w(0)}{h} = \pm\infty$

pas finie.

w n'est pas dérivable en 0

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$u(x) = 5\sqrt{x} \qquad u'(x) = 5\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$

$v(x) = 7-3x \qquad v'(x) = -3$

$$w'(x) = \frac{\frac{5}{2\sqrt{x}}(7-3x) - (5\sqrt{x})\times(-3)}{(7-3x)^2}$$

$$w'(x) = \frac{1}{(7-3x)^2} \times \underbrace{\left(\frac{5}{2\sqrt{x}}\times(7-3x) + 15\sqrt{x}\times\frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)}_{\text{numérateur}}$$

$$w'(x) = \frac{1}{(7-3x)^2} \times \left(\frac{35-15x+30x}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{15x+35}{(7-3x)^2\times 2\sqrt{x}}$$

Exercice 14 page 160

Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

- $f(x) = -5\sqrt{x}$
- $g(x) = \dfrac{23}{x}$
- $h(x) = 15x^2$
- $j(x) = 3x - 5 + 7\sqrt{x}$
- $k(x) = 3\sqrt{4x+2} - 5x + x^2$
- $m(x) = -\pi - \frac{1}{3}x$

f est définie sur $[0, +\infty[$ et est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $f'(x) = -5 \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-5}{2\sqrt{x}}$

g est définie sur $\mathbb{R}^*$ et est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = 23 \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{23}{x^2}$

h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = 15 \times 2x = 30x$

j est définie sur $[0 ; +\infty[$ et est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et $j'(x) = 3 + \dfrac{7}{2\sqrt{x}}$

m est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $m'(x) = -\dfrac{1}{3}$

Fonction composée : activité + Cours

Situation 2 — **Composer des fonctions**

Objectif Découvrir la composition $g(ax+b)$.

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 2x + 5$ et la fonction g, définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = 5\sqrt{x} + 3$.

1. Donner une expression en fonction de x des fonctions $u + g$, $u \times g$ et $\frac{u}{g}$ définies sur $\mathbb{R}^+$. $\mathbb{R}^+$

2. a. Recopier le tableau suivant et le compléter lorsque cela est possible.

$x \longrightarrow$	$u(x) \xrightarrow{g}$	$g(u(x))$
10	$2\times10+5 = 25$	$5\times5+3=28$
1	$2\times1+5 = 7$	$5\sqrt{7}+3$
−5	$2\times(-5)+5=-5$	×
5,5	$2\times5,5+5=16$	$5\sqrt{16}+3 = 23$
−3	$2\times(-3)+5=-1$	×
8	$2\times8+5=21$	$5\sqrt{21}+3$

b. Deux cellules du tableau ne peuvent pas être complétées. Expliquer pourquoi.

c. Préciser l'ensemble de définition et l'expression de la fonction définie dans la colonne de droite du tableau.

1) Pour x positif,

$(u+g)(x) = u(x) + g(x)$
$= 2x + 5 + 5\sqrt{x} + 3$

$(u\times g)(x) = u(x)\times g(x)$
$= (2x+5)(5\sqrt{x}+3)$

$\left(\frac{u}{g}\right)(x) = \frac{2x+5}{5\sqrt{x}+3} = \frac{u(x)}{g(x)}$

2) g est définie sur $\mathbb{R}^+$ $(\sqrt{x})$
donc si $u(x) < 0$, le calcul est impossible.

3)

$x \overset{u}{\longmapsto} u(x) \overset{g}{\longmapsto} g(u(x))$

$? \longrightarrow \in \mathbb{R}^+$

$u(x) = 2x + 5$

$u(x) \geq 0 \iff 2x + 5 \geq 0$
$\iff 2x \geq -5 \quad) -5$
$\iff x \geq -\frac{5}{2} \quad) \div 2 \; (+)$

ens. de déf. $\left[-\frac{5}{2} ; +\infty\right[$

$x \overset{u}{\longmapsto} u(x) \overset{g}{\longmapsto} g(u(x))$

$ X \longmapsto 5\sqrt{X}+3$

$x \longmapsto 2x+5 \longmapsto 5\sqrt{2x+5}+3$

$g(x) = 5\sqrt{x}+3$
$g(X) = 5\sqrt{X}+3$

$g(u(x)) = 5\sqrt{2x+5} + 3$ pour $x \geq -5/2$

$|3| = 3$; $|-6| = 6$ $|5-9| = |-4| = 4$

$|\pi - 4| = -(\pi - 4)$ car $\pi - 4 < 0$
$= -\pi + 4$

La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. avec $f(x) = |x|$

$a = 0$ $\dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \dfrac{|h| - 0}{h} = \dfrac{|h|}{h} = \begin{cases} \dfrac{h}{h} = 1 & \text{si } h > 0 \\ \dfrac{-h}{h} = -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{h \to 0^{>}} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^{>}} 1 = 1 \\ \lim\limits_{h \to 0^{<}} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^{<}} -1 = -1 \end{array}\right\}$ pas égalité. pas de limite quand h se rapproche de 0

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ n'existe pas. donc la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5 page 160

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (8x - 9)^6$.

$$x \longmapsto \underbrace{8x - 9}_{X} \longrightarrow (8x - 9)^6$$
$$X \longrightarrow X^6.$$

1. Montrer que $f(x)$ est écrite sous la forme $f(x) = g(mx + p)$ en précisant l'expression de g ainsi que les valeurs de m et p.

2. En déduire l'expression de la fonction dérivée de f.