

Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

- $n(x) = \sqrt{3}x^2 - \pi x + \frac{1}{3}$
- $p(x) = (2x^2 - x + 1)(-7x + 8)$
- $r(x) = \frac{3x-7}{x}$
- $s(x) = \frac{x+5}{2x-1}$
- $t(x) = \frac{x^2+3x-7}{x+5}$
- $w(x) = \frac{5\sqrt{x}}{7-3x}$

dom. de déf de n : \mathbb{R}
 dom. de dérivabilité de n : \mathbb{R}
 car n est un polynôme.

$$n'(x) = 2\sqrt{3}x - \pi + 0 = 2\sqrt{3}x - \pi$$

2) p est déf. et dérivable sur \mathbb{R} .

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\begin{cases} u(x) = 2x^2 - x + 1 \\ v(x) = -7x + 8 \end{cases}$$

$$u'(x) = 2 \times 2x - 1 + 0 = 4x - 1$$

$$v'(x) = -7$$

$$p'(x) = (4x - 1) \times (-7x + 8) + (2x^2 - x + 1) \times (-7)$$

$$p'(x) = -28x^2 + 32x + 7x - 8 - 14x^2 + 7x - 7$$

$$p'(x) = -42x^2 + 46x - 15$$

3) r est déf. et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\begin{cases} u(x) = 3x - 7 \\ v(x) = x \end{cases}$$

$$u'(x) = 3$$

$$v'(x) = 1$$

$$r'(x) = \frac{3 \times x - (3x - 7) \times 1}{x^2} = \frac{3x - 3x + 7}{x^2} = \frac{7}{x^2}$$

4) Δ est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

$$\Delta(x) = \frac{x+5}{2x-1} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\begin{cases} u(x) = x+5 \\ v(x) = 2x-1 \end{cases}$$

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = 2$$

$$\Delta'(x) = \frac{1 \times (2x-1) - (x+5) \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{2x-1-2x-10}{(2x-1)^2} = \frac{-11}{(2x-1)^2}$$

5) $t(x) = \frac{x^2+3x-7}{x+5}$ t est définie et dérivable sur: $]-\infty; -5[\cup]-5; +\infty[$

$$x+5 \neq 0$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\begin{cases} u(x) = x^2 + 3x - 7 & u'(x) = 2x + 3 \\ v(x) = x + 5 & v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$(2x+3)(x+5) - (x^2+3x-7) \times 1$$

u')

$$N(x) = x + 5$$

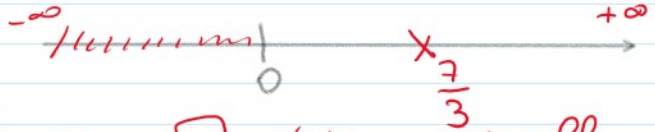
$$N'(x) = 1$$

$$t'(x) = \frac{(2x+3) \times (x+5) - (x^2+3x-7) \times 1}{(x+5)^2} = \frac{2x^2 + 10x + 3x + 15 - x^2 - 3x + 7}{(x+5)^2}$$

$$t'(x) = \frac{x^2 + 10x + 22}{(x+5)^2}$$

6) $w(x) = \frac{5\sqrt{x}}{7-3x}$; $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur \mathbb{R}^+

$$\checkmark \perp 7-3x=0 \Leftrightarrow 7=3x \Leftrightarrow \frac{7}{3}=x$$

$-\infty$  $+\infty$ env. de déf de w : $\left[0; \frac{7}{3} \right[\cup \left] \frac{7}{3}; +\infty \right[$

\triangle $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0

déf. de m. dérivé: $\frac{w(a+h)-w(a)}{h}$ avec $a=0$.

$$\text{Dérivabilité en } 0: \frac{w(h)-w(0)}{h} = \frac{5\sqrt{h}}{7-3h} - 0 = \frac{1}{h} \times \frac{5\sqrt{h}}{7-3h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \times \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} \times \frac{5}{7-3h} = \frac{1 \times 5}{\sqrt{h} \times (7-3h)}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} \times (7-3h) = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w(h)-w(0)}{h} = +\infty$$

pas finie

w n'est pas dérivable en 0

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$u(x) = 5\sqrt{x}$$

$$u'(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

$$v(x) = 7-3x$$

$$v'(x) = -3$$

$$w'(x) = \frac{5(7-3x) - (5\sqrt{x}) \times (-3)}{(7-3x)^2}$$

$$w'(x) = \frac{1}{(7-3x)^2} \times \left(\frac{5}{2\sqrt{x}} \times (7-3x) + 15\sqrt{x} \times \frac{2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \right)$$

numérateur

$$w'(x) = \frac{1}{(7-3x)^2} \times \left(\frac{35 - 15x + 30x}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{15x + 35}{(7-3x)^2 \times 2\sqrt{x}}$$

Exercice 14 page 160

Donner la fonction dérivée des fonctions suivantes en précisant le domaine de définition et de dérivabilité.

- $f(x) = -5\sqrt{x}$
- $g(x) = \frac{23}{x}$
- $h(x) = 15x^2$
- $j(x) = 3x - 5 + 7\sqrt{x}$
- $k(x) = 3\sqrt{4x+2} - 5x + x^2$
- $m(x) = -\pi - \frac{1}{3}x$

f est définie sur $[0, +\infty[$ et est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $f'(x) = -5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-5}{2\sqrt{x}}$

g est définie sur \mathbb{R}^* et est dérivable sur \mathbb{R}^* et $g'(x) = 23 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{23}{x^2}$

h est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $h'(x) = 15 \times 2x = 30x$

j est définie sur $[0; +\infty[$ et est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $j'(x) = 3 + \frac{7}{2\sqrt{x}}$

m est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $m'(x) = -\frac{1}{3}$

Situation 2 Composer des fonctions

Objectif
Découvrir
la composition
g(u(x)).

On considère la fonction u définie sur \mathbb{R} par $u(x) = 2x + 5$ et la fonction g , définie sur \mathbb{R}^+ par $g(x) = 5\sqrt{x} + 3$.

- 1 Donner une expression en fonction de x des fonctions $u + g$, $u \times g$ et $\frac{u}{g}$ définies sur \mathbb{R}^+ .
- 2 a. Recopier le tableau suivant et le compléter lorsque cela est possible.

x	$u(x)$	$g(u(x))$
10	$2 \times 10 + 5 = 25$	$5 \times 5 + 3 = 28$
1	$2 \times 1 + 5 = 7$	$5\sqrt{7} + 3$
-5	$2 \times (-5) + 5 = -5$	\times
5,5	$2 \times 5,5 + 5 = 16$	$5\sqrt{16} + 3 = 23$
-3	$2 \times (-3) + 5 = -1$	\times
8	$2 \times 8 + 5 = 21$	$5\sqrt{21} + 3$

- b. Deux cellules du tableau ne peuvent pas être complétées. Expliquer pourquoi.
- c. Préciser l'ensemble de définition et l'expression de la fonction définie dans la colonne de droite du tableau.

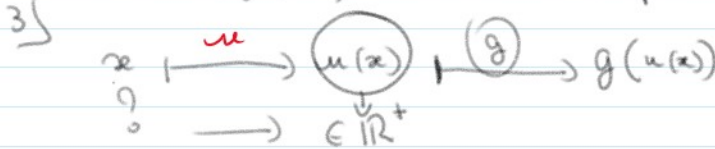
1) Par x positif,

$$(u + g)(x) = u(x) + g(x) = 2x + 5 + 5\sqrt{x} + 3$$

$$(u \times g)(x) = u(x) \times g(x) = (2x + 5)(5\sqrt{x} + 3)$$

$$\left(\frac{u}{g}\right)(x) = \frac{2x + 5}{5\sqrt{x} + 3} = \frac{u(x)}{g(x)}$$

2) g est définie sur \mathbb{R}^+ (\sqrt{x})
donc si $u(x) < 0$, le calcul est impossible.

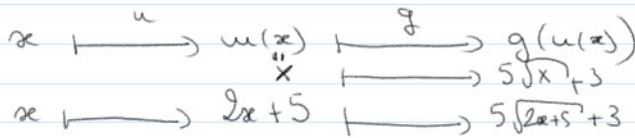


$$u(x) = 2x + 5 \quad u(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 5 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x \geq -5$$

$$\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{2} \quad \leftarrow \text{div 2} \oplus$$

ens. de déf. $\left[-\frac{5}{2}; +\infty[$



$$g(u(x)) = 5\sqrt{2x+5} + 3 \quad \text{par } x \geq -\frac{5}{2}$$

$$g(x) = 5\sqrt{x} + 3$$

$$g(x) = 5\sqrt{x} + 3$$

$$|3| = 3$$

$$|-6| = 6$$

$$|5-9| = |-4| = 4$$

$$|\pi-4| = \ominus(\pi-4) \quad \text{car } \pi-4 < 0 \\ = -\pi+4$$

la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. avec $f(x) = |x|$

$$a=0 \quad \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \frac{h}{h} = 1 & \text{si } h > 0 \\ \frac{-h}{h} = -1 & \text{si } h < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

} pas égalité.

} pas de limite quand h se rapproche de 0

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ n'existe pas. donc la fonction valeur

absolue n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5 page 160

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (8x - 9)^6$.

1. Montrer que $f(x)$ est écrite sous la forme $f(x) = g(mx + p)$ en précisant l'expression de g ainsi que les valeurs de m et p .
2. En déduire l'expression de la fonction dérivée de f .

$$x \longmapsto \underbrace{8x - 9}_X \longrightarrow (8x - 9)^6 = X^6$$