Exemples du cours

* la fonction définie par $f(x) = x^5$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 5x^4$.
* la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^7}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -7 \times \frac{1}{x^8}$.
* la fonction définie par $f(x) = x^4 + \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 4x^3 - \frac{1}{x^2}$.
* la fonction définie par $f(x) = 5x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$
* la fonction définie par $g(x) = -4 \times \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $g'(x) = -4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{2}{\sqrt{x}}$
* la fonction f définie par $f(x) = -4x^5 - 2x^2 + 4x - 9$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$

et $f'(x) = -4 \times 5x^4 - 2 \times 2x + 4 \times 1 - 0 = -20x^4 - 4x + 4$

* la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$

et $f'(x) = 2x \times \sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2x\sqrt{x} + x^2 \times \frac{\sqrt{x}}{2x}$

$= 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2}x\sqrt{x} = \frac{5}{2}\sqrt{x}$.

on a posé : $\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$ $\quad u'(x) = 2x$, $\quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ et $(uv)' = u'v + uv'$.

* la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{-3}{2x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

On pose : $\begin{cases} u(x) = -3 \\ v(x) = 2x^2 \end{cases}$ $\quad u'(x) = 0$, $\quad v'(x) = 2 \times 2x = 4x$ $\quad$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$f'(x) = \frac{0 \times 2x^2 - (-3) \times 4x}{(2x)^2} = +\frac{3}{x^3}$ après simplification

ou mieux, $f(x) = -\frac{3}{2} \times \frac{1}{x^2}$ et $f'(x) = -\frac{3}{2} \times (-2) \times \frac{1}{x^3} = \frac{3}{x^3}$.

* la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{4x-3}{x^2+2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\begin{cases} u(x) = 4x - 3 \\ v(x) = x^2 + 2 \end{cases}$ $\quad u'(x) = 4$, $\quad v'(x) = 2x$ $\quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$g'(x) = \frac{4(x^2+2) - (4x-3) \times 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{4x^2 + 8 - 8x^2 + 6x}{(x^2+2)^2} = \frac{-4x^2 + 6x + 8}{(x^2+2)^2}$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5}{-3x^2 + 4x - 2}$$

Ensemble de définition ?

Valeurs interdites sont les racines du polynôme $-3x^2 + 4x - 2$.
de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = -3$; $b = 4$ et $c = -2$.
$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 16 - 24 = -8 < 0$
pas de racines réelles donc ens de définition de f est $\mathbb{R}$
f est une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ens de définition : $\mathbb{R}$ donc l'ens de dérivabilité est $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5}{-3x^2 + 4x - 2}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\begin{cases} u(x) = 3x^2 - 5 \\ v(x) = -3x^2 + 4x - 2 \end{cases}$$

$u'(x) = 3 \times 2x + 0 = 6x$
$v'(x) = -3 \times 2x + 4 \times 1 + 0 = -6x + 4$

$$f'(x) = \frac{6x \times (-3x^2 + 4x - 2) - (3x^2 - 5) \times (-6x + 4)}{(-3x^2 + 4x - 2)^2} = \frac{-18x^3 + 24x^2 - 12x - (-18x^3 + 12x^2 + 30x - 20)}{(-3x^2 + 4x - 2)^2}$$

$$= \frac{12x^2 - 42x + 20}{(-3x^2 + 4x - 2)^2}$$

Ex wooclap. Question 4

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\begin{cases} u(x) = \sqrt{x} - 1 \\ v(x) = \sqrt{x} + 1 \end{cases}$$

$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times (\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} - 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)^2}$$