# NOMBRE DÉRIVÉ ET DÉRIVÉE DES FONCTIONS USUELLES

## 1. Nombre dérivé et tangente à une courbe

### 1.1. Taux de variation

**Définition 1.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I, $a$ et $a+h$ sont deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.

Le **taux de variation** de la fonction $f$ entre $a$ et $a+h$ (avec $h \neq 0$) est le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

**Capacité : calculer un taux de variation**

Soit $f$ la fonction $x \mapsto x^2$. Calculer le taux de variation de $f$ entre 2 et $2+h$.

### 1.2. Nombre dérivé d'une fonction en un point

**Définition 2.**

- Dire que la fonction $f$ est dérivable en $a$ signifie que le taux de variation de $f$ entre $a$ et $a+h$ a pour limite un nombre réel lorsque $h$ tend vers 0.
- Ce nombre réel, lorsqu'il existe est appelé **nombre dérivé de $f$ en $a$** et il est noté $f'(a)$.

Lorsque $f$ est dérivable en $a$, on a ainsi $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

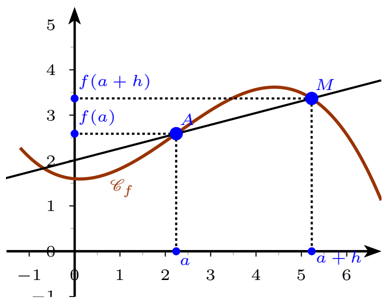
**Capacité : calculer le nombre dérivé de la fonction carré en un point.**

1. Soit $f$ la fonction $x \mapsto x^2$. Donner $f'(2)$.
2. Soit $f$ la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Donner $f'(3)$.

### 1.3. Tangente à la courbe représentative d'une fonction

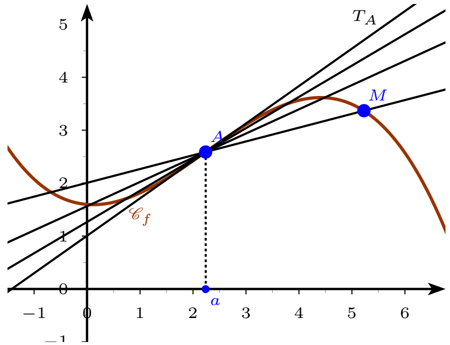
**Interprétation graphique**

Dans repère, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de la fonction $f$.
$A$ et $M$ sont les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives $a$ et $a+h$ avec $h \neq 0$. Le taux de variation :
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{y_M - y_A}{x_M - x_A}$
est le coefficient directeur de la droite $(AM)$.




**Tangente à la courbe représentative d'une fonction**

Dire que $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers $f'(a)$ quand $h$ tend vers 0, c'est dire que lorsque le point $M$ tend sur la courbe $\mathscr{C}_f$ vers le point $A$, les droites $(AM)$ tendent vers une « position limite » : celle de la droite $T_A$ passant par $A$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Cette droite semble presque confondue avec la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $A$.




**Définition de la tangente**

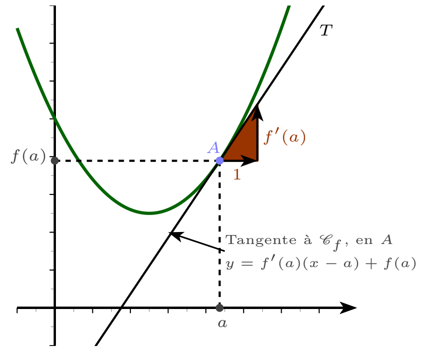
**Définition 3.**

Dans un repère, soit $f$ une fonction dérivable en $a$.
La tangente $T$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction $f$ au point $A$ d'abscisse $a$ est la droite passant par $A$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

**Equation de la tangente**

**Equation de la tangente**
Dans un repère, l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$




**Démonstration à connaître**

**Capacité : déterminer l'équation d'une tangente.**

Soit $f$ la fonction $x \mapsto x^2$. Déterminer l'équation de la tangente $T$ à la courbe représentative de la fonction $f$ au point $A$ d'abscisse 2.

## 2. Fonctions dérivées

**Définition 4.**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I.
Dire que $f$ est dérivable sur I signifie que $f$ est dérivable en tout nombre réel $x$ de I.
La fonction qui a tout nombre réel $x$ de I associe $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de $f$. Cette fonction est notée $f'$ et elle est définie sur I par $f' : x \mapsto f'(x)$.

### 2.1. Dérivées des fonctions usuelles

Propriété : à maîtriser **parfaitement**

| Fonction | Fonction $f$ | Fonction dérivée $f'$ | $f$ étant dérivable sur |
|---|---|---|---|
| Constante | $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R}$ | $0$ | $\mathbb{R}$ |
| Identité | $f(x) = x$ | $1$ | $\mathbb{R}$ |
| Affine | $f(x) = mx + p$ avec $m,\, p \in \mathbb{R}$ | $m$ | $\mathbb{R}$ |
| Carrée | $f(x) = x^2$ | $2x$ | $\mathbb{R}$ |
| Cube | $f(x) = x^3$ | $3x^2$ | $\mathbb{R}$ |
| Inverse | $f(x) = \dfrac{1}{x}$ | $-\dfrac{1}{x^2}$ | $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$ |
| Racine carrée | $f(x) = \sqrt{x}$ (avec $x \geqslant 0$) | $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0; +\infty[$ |

Attention à l'ensemble de dérivabilité

**Propriété 1.**

La fonction racine carrée est définie en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

**Démonstrations à connaître :**

- La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- La fonction dérivée de la fonction carrée.
- La fonction dérivée de la fonction inverse.

**Exemples d'utilisation**

Capacité : calculer un nombre dérivé

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Calculer $f'(-2)$ et $f'(1)$.
2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Calculer $f'(-4)$ et $f'(4)$.

### 2.2. Fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z})$

**Propriété 2.**

Pour tout entier relatif $n$, la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}^*$ si $n$ est négatif) par $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}^*$ si $n$ est négatif), et on a, pour tout réel $x$ (non nul si $n$ est négatif) :

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

.

**Application** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$.
Calculer la fonction dérivée de $f$.

**Application** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^7}$.
Calculer la fonction dérivée de $g$.

## 3. Dérivées et opérations

### 3.1. Somme et produit par un réel

**Propriété 3.**

**Somme :** Si $f(x) = u(x) + v(x)$ où $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors $f$ est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x) + v'(x)$. On note

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Capacité : calculer une fonction dérivée.

Calculer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$.

**Propriété 4.**

**Produit par un réel :** Si $f(x) = \lambda u(x)$ où $\lambda$ est un réel et $u$ est dérivable sur un intervalle I, alors $f$ est dérivable sur I et $f'(x) = \lambda u'(x)$.

On note

$$(\lambda u)' = \lambda u'.$$

**Application**

1. Calculer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 5x^3$.
2. Calculer la fonction dérivée $g'$ de la fonction $g$ définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = -4\sqrt{x}$.

**Fonction polynôme**

**Définition 5.**

Une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme** si $f(x)$ peut s'écrire comme somme de termes de la forme $kx^n$ avec $n \in N$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

**Propriété 5.**

Toutes les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Capacité : calculer une fonction dérivée.

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = -4x^5 - 2x^2 + 4x - 9$. Donner l'ensemble de définition de $f$.
En déduire son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée $f'$.

### 3.2. Produit, inverse et quotient

**Propriété 6.**

**Produit :** Si $f(x)=u(x)v(x)$ où $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors $f$ est dérivable sur I et $f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
On note :

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

**Démonstration à connaître.**

Capacité : calculer une fonction dérivée

Calculer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=x^2\sqrt{x}$.

**Propriété 7.**

**Dérivée du quotient :**

- Si $f(x)=\dfrac{1}{u(x)}$ où $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $u(x)\neq 0$ pour tout $x$ de I, alors $f$ est dérivable sur I et $f'(x)=-\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$.
- Si $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si $v(x)\neq 0$ pour tout $x$ de I, alors $f$ est dérivable sur I et $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

**Notation** On note :

$$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$$

et

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Capacité : calculer une fonction dérivée

1. Calculer la fonction dérivée $f'$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{-3}{2x^2}$.
2. Calculer la fonction dérivée $g'$ de la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{4x-3}{x^2+2}$.

**Définition 6.**

**Fonction rationnelle :** Toutes les fonctions de la forme $x\mapsto\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u$ et $v$ sont des fonctions polynômes s'appellent des **fonctions rationnelles**.

**Propriété 8.**

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Capacité : calculer une fonction dérivée.

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=\dfrac{3x^2-5}{-3x^2+4x-2}$. Donner l'ensemble de définition de $f$. En déduire son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée $f'$.

### 3.3. Fonction dérivée de $x\mapsto g(ax+b)$

**Propriété 9.**

Si $g$ est une fonction dérivable sur un intervalle J, et si $a$ et $b$ sont deux nombres réels tels que pour tout $x$ de I, $ax+b$ appartient à J, alors la fonction $f:x\mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur I et, pour tout nombre réel de I,

$$f'(x)=a\times g'(ax+b).$$

Capacité : calculer une fonction dérivée.

Soit la fonction $f$ définie sur $[2;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{3x-6}$. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de $f$, puis sa fonction dérivée.

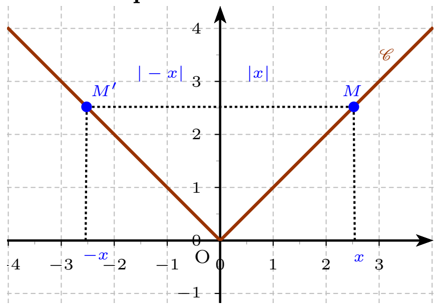
### 3.4. Fonction valeur absolue $x\mapsto|x|$

**Définition 7.**

La **valeur absolue** d'un nombre réel $x$ est égale à $x$ si $x$ est positif, à $-x$ si $x$ est négatif.
La valeur absolue du nombre $x$, notée $|x|$ est :

$$|x|=\begin{cases}x & \text{si } x\geqslant 0\\ -x & \text{si } x\leqslant 0\end{cases}$$

**Courbe représentative**




**Exemples** Calculer :

1. $|3|=$
2. $|-6|=$
3. $|5-9|=$
4. $|\pi-4|=$

**Propriété 10.**

La fonction $x\mapsto|x|$ n'est pas dérivable en 0.

Démonstration à connaître.