2. Fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ ($n \in Z$)

Propriété

Pour tout entier relatif n, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}^*$ si n est négatif) par $f(x) = x^n$ est dérivable sur sur $\mathbb{R}$ (sur $\mathbb{R}^*$ si n est négatif), et on a, pour tout réel x (non nul si n est négatif) :

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

.

Application

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5$.

Calculer la fonction dérivée de f.

Application

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x^7}$.

Calculer la fonction dérivée de g.

III) Dérivées et opérations

1. Somme et produit par un réel

Propriété

Si $f(x) = u(x) + v(x)$ où u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Propriété

Si $f(x) = u(x) + v(x)$ où u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

On note

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Exemple

Capacité : calculer une fonction dérivée.

Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f(x) = x^4 + \dfrac{1}{x}$.

Produit par un réel

Propriété

Si $f(x) = \lambda u(x)$ où λ est un réel et u est dérivable sur un intervalle I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = \lambda u'(x)$.

Produit par un réel

Propriété

Si $f(x) = \lambda u(x)$ où λ est un réel et u est dérivable sur un intervalle I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = \lambda u'(x)$.

On note
$$(\lambda u)' = \lambda u'.$$

Application

Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 5x^3$.

Application

Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = -4\sqrt{x}$.

Fonction polynôme

Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme** si $f(x)$ peut s'écrire comme somme de termes de la forme kx^n avec $n \in N$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

Fonction polynôme

Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une **fonction polynôme** si $f(x)$ peut s'écrire comme somme de termes de la forme kx^n avec $n \in N$ et $k \in \mathbb{R}^*$.

Propriété

Toutes les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Exemple

Capacité : calculer une fonction dérivée.

Soit la fonction f définie par $f(x) = -4x^5 - 2x^2 + 4x - 9$.
Donner l'ensemble de définition de f. En déduire son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée f'.

Propriété

Si $f(x) = u(x)v(x)$ où u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

On note :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Démonstration à connaître.

Exemple

Capacité : calculer une fonction dérivée

Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x^2\sqrt{x}$.

Dérivée du quotient

Propriété

- Si $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $u(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$.

Dérivée du quotient

Propriété

- Si $f(x) = \dfrac{1}{u(x)}$ où u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $u(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{(u(x))^2}$.
- Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si $v(x) \neq 0$ pour tout x de I, alors f est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.

Notation

On note :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

et

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Exemple

Capacité : calculer une fonction dérivée

Calculer la fonction dérivée f' de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :
$f(x) = \dfrac{-3}{2x^2}$.

Exemple

Capacité : calculer une fonction dérivée

Calculer la fonction dérivée g' de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = \dfrac{4x-3}{x^2+2}$.

Fonction rationnelle

Définition

Toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v sont des fonctions polynômes s'appellent des **fonctions rationnelles**.

Fonction rationnelle

Définition

Toutes les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où u et v sont des fonctions polynômes s'appellent des **fonctions rationnelles**.

Propriété

Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Exemple

Capacité : calculer une fonction dérivée.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5}{-3x^2 + 4x - 2}$.
Donner l'ensemble de définition de f. En déduire son ensemble de dérivabilité, puis calculer sa dérivée f'.